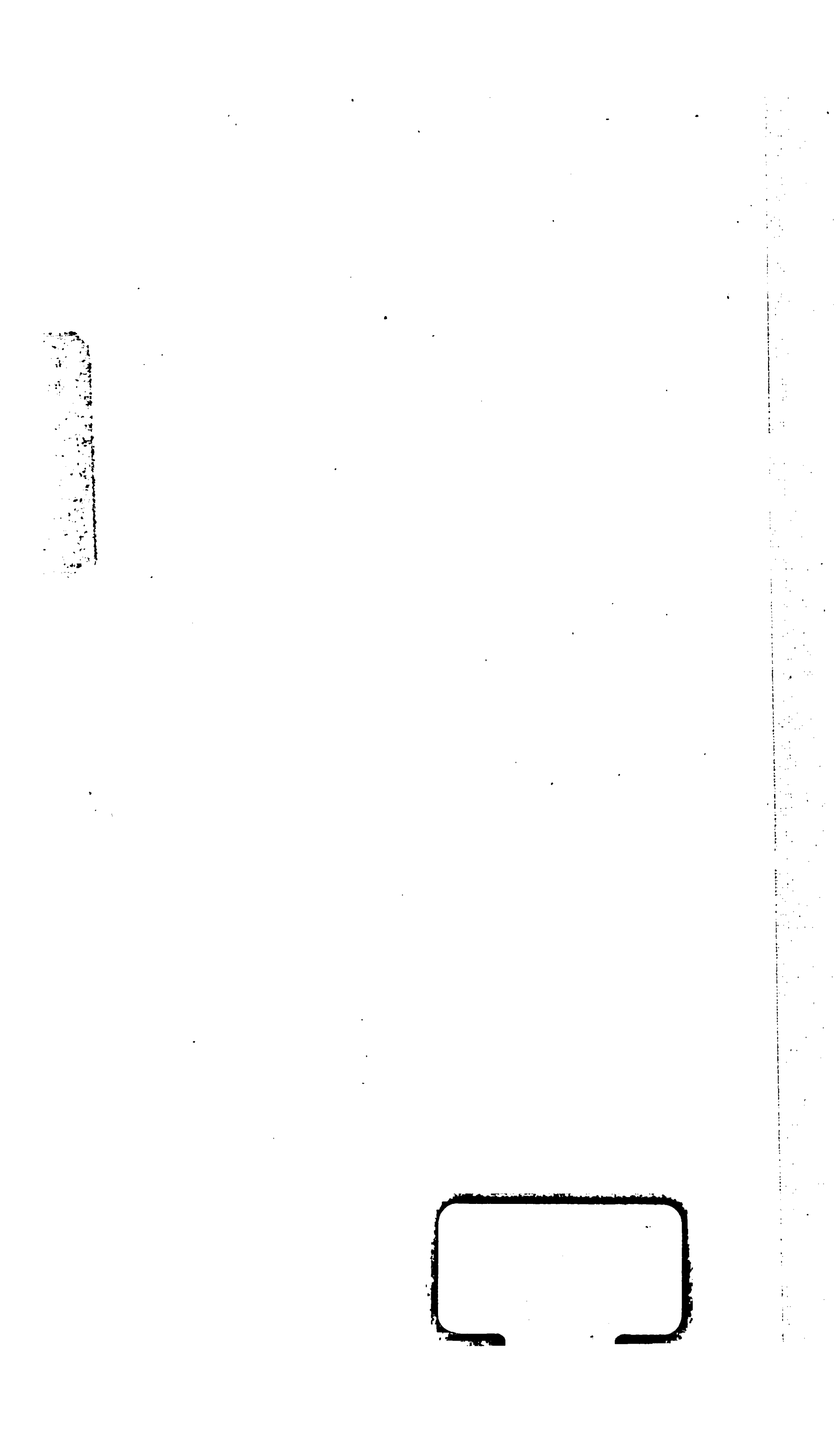


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909447 6



Ausführliches

Lehrbuch der Analysis,

zum

Selbstunterricht

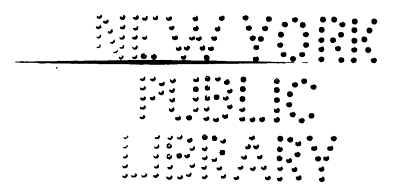
mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens

bearbeitet

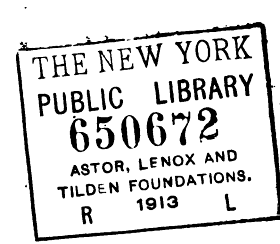
von

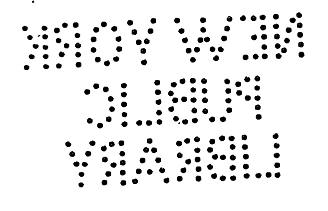
H. B. Lübsen.

Siebente, vermehrte und verbesserte Auflage.



Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1877.





Vorwort zur ersten Auflage.

Die Wissenschaft, welche den Titel „Analysis" führt, kann als eine Fortsetzung der Algebra und zugleich als eine Brücke zur Differential- und Integral-Rechnung betrachtet werden. Ihr Inhalt ist, wie der der Algebra, so mannichfaltig, dass es auch hier unmöglich ist, denselben in wenigen Worten zusammenzufassen oder eine bestimmte Definition von dem Worte Analysis zu geben. Was dies Wort bezeichnet, kann man nur nach und nach erfahren.

Zu ihren Resultaten führen indessen mehrere sehr verschiedene Methoden. Wir haben diejenige gewählt, welche uns für den ersten Anfänger und zum Selbstunterricht, wozu dies Werk bestimmt ist, am geeignetsten schien.

Wer jedoch die Mathematik nicht als Mittel, sondern als Zweck betrachtet, wird schon von selbst nicht unterlassen, sich auch mit den übrigen, namentlich mit der Cauchy'schen Methode, bekannt zu machen.

Hamburg, im Juni 1853.

Lübsen.

Vorwort zur siebenten Auflage.

Nach dem Tode des um die mathematischen Wissenschaften hochverdienten Verfassers des vorliegenden Werkes wurde ich, der Unterzeichnete, mit der Herausgabe einer neuen Auflage betraut. Aeussere Gründe bestimmten mich, die Anordnung des Stoffes unverändert zu lassen und den Umfang des Werkes nicht unnöthig zu vergrössern. Ich behielt daher auch die in § 48 gegebene Ableitung des allgemeinen Gliedes der höhern arithmetischen Reihe bei, da die strengere ein neues Capitel — die Rechnung mit Binomialcoefficienten — nöthig gemacht hätte. An verschiedenen Stellen wählte ich dagegen eine präcisere Darstellung und Beweisführung und füllte durch Aufnahme neuer Sätze (z. B. in den §§ 2, 80, 111, 120, 121b, 129), die unbedingt in den Bereich dieses Werkes gehören, einige fühlbare Lücken aus. Die sämmtlichen Auflösungen der Gleichung 4. Grades in § 139, ferner die in den §§ 178, 179 und 180 gegebenen Theorien, sowie einige in den §§ 33, 34, 78 und 128 enthaltene Bemerkungen erscheinen hiermit zum ersten Male im Druck, obgleich ich sie schon im Jahre 1858 einigen Mathematikern vorlegte.

Möge das Werk auch in dieser neuen Gestalt eben so segensreich wie bisher wirken!

Leipzig, im März 1877.

Richard Schurig.

Erstes Buch.

Combinationslehre.

Einleitung.

1.

Die Combinationslehre (Combinatorik, Syntaktik) ist die Wissenschaft von den Gesetzen, nach welchen eine Anzahl gegebener Dinge sich ordnen und verbinden lässt. Sie hat als solche nicht allein ein rein wissenschaftliches, sondern auch ein praktisches Interesse, indem sie bei verschiedenen mathematischen Untersuchungen sehr oft Anwendung findet, namentlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wo man das Reich der Möglichkeiten durchsucht und dessen Grenze bestimmt, dann auch in der Kunst zu beobachten und eine Reihe nothwendiger Versuche in gehöriger Ordnung und Verbindung anzustellen.

2.

Um den oben ausgesprochenen Begriff der Combinationslehre und das, was man unter Ordnen und Verbinden versteht, noch etwas deutlicher zu bezeichnen und zugleich die Hauptfragen, deren Beantwortung sie lehren soll, zuerst hervorzuheben, geben wir im Nachstehenden die wesentlichsten Vorbegriffe und in den zunächst folgenden Paragraphen vorbereitende Beispiele.

Elemente nennt man in der Combinationslehre Dinge (Individuen) ohne Rücksicht auf Quantität (Grösse) und Qualität (Art). So sind z. B. a, d, e, oder 1, 4, 6 drei Elemente.

Complexion (Gruppe) ist eine Vereinigung (Zusammenstellung) von Elementen, die nach irgend welcher Reihenfolge angeordnet sind. So ist z. B. *adbc* eine Complexion von 4 Elementen, 231 eine Complexion von 3 Elementen.

Zwei Elemente bilden eine „Inversion", wenn das erste dieser beiden höher als das zweite ist. So hat z. B. 2431 vier Inversionen: 21, 43, 41, 31.

3.

Es sei die Aufgabe gegeben: Alle möglichen vierziffrigen Zahlen darzustellen, welche sich mit den vier Ziffern 1, 2, 3, 4 schreiben lassen.

Einige der hier geforderten Zahlen darzustellen, ist offenbar leicht. Verschieden sind z. B. schon die Zahlen 1234, 1243, 1423, 3124 &c. Allein man sieht wohl, worauf es ankommt, um alle möglichen zu erhalten, nämlich eine allgemeine Methode zu erfinden, nach welcher man eine Anzahl Elemente (die wir der leichteren Uebersicht halber mit Ziffern bezeichnen wollen) in allen möglichen verschiedenen Folgen (Nebeneinandersein) hinschreiben kann, oder, was dasselbe ist, in einer Complexion von Elementen, z. B. in 1, 2, 3, 4, die Plätze derselben auf alle mögliche Weise zu verwechseln. Derjenige Theil der Combinationslehre, welcher diese Art Aufgaben lösen, nämlich alle möglichen Versetzungen (Permutationen) einer bestimmten Anzahl Elemente angeben lehrt, heisst Permutation und durch die Bezeichnung P (1, 2, 3, 4), wofür man auch P_4 oder auch P (4) oder P (*a*, *b*, *c*, *d*) oder P (*a* ‖ *d*) schreibt, wird die hier in Worten ausgesprochene Forderung kurz angedeutet.

4.

Es sei ferner die Aufgabe gegeben: Alle möglichen Verbindungen (Combinationen) darzustellen, welche sich aus einer gegebenen Anzahl Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 (z. B. Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohle, Schwefel &c.) machen lassen, indem man je zwei, oder je drei &c. Elemente verbindet, oder

wie es in der Kunstsprache heist, zur zweiten, dritten Classe &c. combinirt und welche Forderung in Zeichen durch $\overset{2}{C}$ (1,2,3,4,5,6), $\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6) angedeutet wird. Für den letztern Ausdruck findet man auch $\overset{3}{C}$ (6) oder $\underset{3}{C}$ (6) oder C_3 (1 ‖ 6) u. s. w.

Einige dieser verschiedenen Combinationen aus den sechs Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 lassen sich offenbar leicht bilden. Zur zweiten Classe hätte man unter andern z. B. 12, 13, 16, 23, 35 &c. und zur dritten Classe z. B. 123, 124, 136, 345 &c. Derjenige Theil der Combinationslehre, welcher diese Art Aufgaben lösen lehrt und ein allgemeines Verfahren angiebt, alle an Inhalt verschiedenen Combinationen zu einer bestimmten Classe darzustellen, so wie auch eine allgemeine Regel aufstellt, ihre Anzahl im Voraus zu berechnen, heisst Combination. Hierbei dürfen also keine Permutationen einer schon aufgestellten Combination vorkommen, und Formen, wie 123, 132, 213 z. B. wären also, weil sie ganz dieselben Elemente enthalten, an Inhalt gleich und für eine zu rechnen, weshalb man auch nur eine, hier am passendsten 123, aufstellt.

5.

Es sei endlich noch die Aufgabe gegeben: Aus mehreren verschiedenen Reihen Elemente alle möglichen Combinationen so zu bilden, dass jede der verschiedenen Combinationen aus jeder Reihe ein Element enthält, z. B. eine Reihe verschiedener Säuren A, B, C, D . . . . . mit einer Reihe verschiedener Basen *a*, *b*, *c* . . . zu verbinden, so dass jede der möglichen Combinationen eine Säure und eine Base enthält.

Diese dritte Aufgabe ist offenbar darin von der vorhergehenden zweiten Aufgabe (§ 4) sehr verschieden, weil dort die Elemente aus einer und derselben Reihe, hier aber die Elemente aus verschiedenen Reihen mit einander verbunden werden sollen. Zur Unterscheidung nennt man deshalb auch den Theil der Combinationslehre, welcher diese letztere Art Aufgabe zu behandeln, d. h. eine Methode und eine Regel aufzustellen hat,

1*

nach welcher man alle möglichen Verbindungen dieser Art darstellen und ihre Anzahl im Voraus berechnen kann, Variation.*)

Einige der verschiedenen Verbindungen (Variationen) aus den beiden obigen Reihen A, B, C, D .. und *a*, *b*, *c*, *d* .. wären z. B. A*a*, A*b*, A*c* ..., B*a*, B*b* &c. Bei der Variation ist der Grad der Classe offenbar durch die Zahl der verschiedenen Reihen bestimmt.

Sind *m* verschiedene Reihen, jede von *n* Elementen gegeben, so bezeichnet man die Anzahl aller nur möglichen Variationen mit $\overset{m}{V}(1, 2, 3, \ldots n)$ oder $\overset{m}{V}(n)$ oder $\underset{m}{V}(1 \| n)$ u. s. w.

6.

Hiemit hätten wir nun die Hauptfragen der Combinationslehre, welche die folgenden in Aufgaben gekleideten §§ beantworten sollen, zuerst hervorgehoben und mit dem Anfänger besprochen. Und da dieser nun gehörig vorbereitet ist und weiss, worauf es ankommt, so möge er jetzt versuchen, die folgenden Aufgaben selbstständig zu lösen und diese Wissenschaft selber zu erfinden.

Permutation.

7.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle möglichen Permutationen einer gegebenen Anzahl Elemente, z. B. P (1, 2, 3, 4), darstellen kann.

Auflösung. Die bequemste Regel scheint folgende zu sein: Man schreibe die mit Ziffern (Zeigern, Indices) bezeichneten Elemente erst in natürlicher (arithmographischer) Folge hin, so erhält man die niedrigste Form, hier also: 1234. Durchlaufe diese erhaltene Form rückwärts, bis man an ein niedrigeres

*) Dies Wort, Variation, ist freilich nicht bezeichnend und schon deshalb sehr unpassend gewählt, weil es später in einem ganz andern Sinne zur Bezeichnung des höchsten Theils der Infinitesimalrechnung gebraucht wird.

Element kommt, setze an dessen Stelle das darauf folgende höhere (oder wenn mehrere höhere folgen, das nächst höhere) und lasse hierauf die durchlaufenen (das verdrängte mitgerechnet) in natürlicher Ordnung folgen. Diese einfache Regel wird für jede erhaltene Form so oft wiederholt, bis alle Permutationen zum Vorschein gekommen. Aus P (1, 2, 3, 4) hat man zuerst die niedrigste Form 1234. Weil nun 3 niedriger als 4, so ist die nächst höhere Form 1243. Durchläuft man diese wieder rückwärts, so kommt man erst bei 2 an ein niedrigeres Element; setzen wir an dessen Stelle das nächst höhere der beiden durchlaufenen, so folgt aus der Form 1243 die nächst höhere 1324 &c., nämlich:

P (1, 2, 3, 4)

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Dass man auf diese Weise alle möglichen Permutationen sicher erhält, ergiebt sich daraus, weil man allmählig von der niedrigsten Form bis zur höchsten aufsteigt, worauf die Regel nicht mehr angewandt werden und mithin auch keine mögliche Form fehlen kann.

8.

Formen, welche dasselbe Anfangs-Element haben, rechnet man zu einerlei Ordnung. Vorstehendes Beispiel giebt also vier verschiedene Ordnungen, weil offenbar jedes Element gleich oft an die Spitze zu stehen kommt.

9.

Aufgabe. Eine allgemeine Regel oder Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller möglichen Permutationen aus n Elementen berechnen kann.

Auflösung 1. Ein Element (1) giebt keine Versetzung, also nur eine Complexion, kommt aber ein zweites (2) hinzu, so kann dieses jenem auf zwei verschiedene Weisen zugesellt, nämlich nach- und auch vorgesetzt werden; mithin geben zwei Elemente $1 . 2 = 2$ Permutationen, nämlich 12, 21. Kommt noch ein drittes Element (3) hinzu, so kann dieses jeder der beiden vorhergehenden Formen auf drei verschiedene Weisen zugesellt, nämlich nach-, zwischen- und vorgesetzt werden. Drei Elemente geben also $2 . 3 = 1 . 2 . 3 = 6$ Permutationen. Ein viertes Element (4) findet bei jeder der vorhergehenden 6 Permutationen vier verschiedene Plätze. Vier Elemente geben also $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ Permutationen. Setzt man diese Schlussreihe fort (Beweis durch Induction!) und bezeichnet die Anzahl Permutationen aus n Elementen mit P_n, so findet man leicht, dass ganz allgemein

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . n = n! \text{ (lies: „}n\text{ Facultät")}.$$

Auflösung 2. Weil jedes der n Elemente gleich oft an die Spitze kommt (§ 8), so erhält man die Anzahl der Permutationen aus n Elementen offenbar auch, indem man die Anzahl der Permutationen aus $n - 1$ Elementen mit n multiplicirt, weil es n verschiedene Ordnungen geben muss. In Zeichen:

$$P_n = n . P_{n-1}.$$

Setzt man nun in diese Formel nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ so hat man, weil $P_1 = 1$,

$$\begin{aligned}
P_2 &= 2 . P_1 = 2 . 1 = 2!\\
P_3 &= 3 . P_2 = 3 . 2 . 1 = 3!\\
P_4 &= 4 . P_3 = 4 . 3 . 2 . 1 = 4!\\
&\vdots\\
P_n &= n . P_{n-1} = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3 . 2 . 1 . = n!
\end{aligned}$$

10.

Sind unter den zu permutirenden Elementen mehrere gleiche, wie es häufig der Fall ist, so leuchtet ein, dass die Anzahl der möglichen Permutationen nicht so gross sein kann,

als wenn die Elemente alle verschieden wären, weil die Plätze-Vertauschung gleicher Elemente keine Formveränderung hervorbringt. Es fragt sich nun, wie man in solchem Falle die Anzahl der möglichen verschiedenen Formen im Voraus berechnen kann. Das Verfahren, sie wirklich darzustellen, bleibt dasselbe, wie in § 8. So giebt z. B. P (1, 1, 1, 2, 2, 3):

111223	$1_1 1_2 1_3 223$
111232	$1_1 1_3 1_2 223$
111322	$1_2 1_1 1_3 223$
112123	$1_2 1_3 1_1 223$
112132	$1_3 1_1 1_2 223$
112213	$1_3 1_2 1_1 223$
112231	————
112312	$1_1 1_2 1_3 2_1 2_2 3$
112321	$1_1 1_2 1_3 2_2 2_1 3$

u. s. w.

Nennen wir die Anzahl der verschiedenen Permutations-Formen x, so ist klar, dass, wenn in jeder dieser x verschiedenen Formen die drei gleichen Elemente (1, 1, 1) verschieden würden, dann auch durch Permutation derselben statt jeder der x Formen $1.2.3 = 6$mal so viel kommen würden (wie es für die niedrigste Form 111223 in nebenstehender Reihe angedeutet worden). Würden in jeder dieser verschiedenen $1.2.3.x$ Formen auch noch die zwei gleichen Elemente (2, 2) verschieden, so würden aus jeder der $1.2.3.x$ Formen noch $1.2 = 2$mal so viel hervorgehen. Dann müsste man offenbar so viele Formen erhalten, als wenn alle sechs Elemente verschieden wären. Daher ist (§ 9)

$$1.2.1.2.3.x = 1.2.3.4.5.6$$
$$x = 60.$$

Ist allgemein n die Anzahl aller Elemente und darunter einmal p, einmal q und einmal r gleiche, so ist die Anzahl aller möglichen Permutationen

$$P_n = \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)\,n}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}.$$

Combination.

11.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man aus einer gegebenen Anzahl verschiedener Elemente alle möglichen verschiedenen Combinationen zu einer bestimmten Classe bilden kann, z. B. $\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Auflösung. Man stelle so viele der niedrigsten Elemente in natürlicher Folge zusammen, als der Classenexponent (der hier 3 ist) Einheiten hat. Aus der erhaltenen niedrigsten Form leite man successive die nächst höheren ab, indem man in die letzte Stelle nach und nach die noch vorhandenen höheren Elemente nach ihrer Aufeinanderfolge setzt. Lässt sich in die letzte Stelle kein höheres Element mehr setzen, so muss man erst die vorletzte (vorvorletzte &c.) Stelle erhöhen und dann wieder wie vorhin verfahren, so dass nie ein niedrigeres Element auf ein höheres folgt und auch keine Permutation stattfindet. Aldann müssen alle an Inhalt verschiedenen Combinationen auf diese Weise sogleich geordnet zum Vorschein kommen. So ist z. B.

$\overset{1}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

1,2,3,4,5,6

$\overset{2}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

12	23	34	45	56
13	24	35	46	
14	25	36		
15	26			
16				

$\overset{3}{C}$ (1,2,3,4,5,6)

123	234	345	456
124	235	346	
125	236	356	
126	245		
134	246		
135	256		
136			
145			
146			
156			

$\overset{4}{C}(1,2,3,4,5,6)$			$\overset{5}{C}(1,2,3,4,5,6)$		$\overset{6}{C}(1,2,3,4,5,6)$
1234	2345	3456	12345	23456	123456
1235	2346		12346		
1236	2356		12356		
1245	2456		12456		
1246			13456		
1256					
1345					
1346					
1356					
1456					

12.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller möglichen Combinationen zu einer bestimmten Classe aus einer gegebenen Reihe verschiedener Elemente im Voraus berechnen kann.

Auflösung. Nehmen wir zuerst an, man habe 6 Elemente, so ist klar, dass es nur 6 Combinationen zur ersten Classe giebt. Zu jedem dieser 6 Elemente lässt sich jedes der 5 übrigen setzen, was dann $6.5 = 30$ Verbindungen (Arrangements) zur zweiten Classe giebt. Da nun aber kein Element vor dem andern einen Vorzug hat, sondern alle auf gleiche Weise in die Verbindungen eintreten, mithin jedes Element gleich oft vor und nach zu stehen kommen muss, so sind diese 6.5 Verbindungen offenbar je zwei an Inhalt gleich oder permutirt. Man hat z. B. 12 und auch 21; 13, 31; 14, 41 &c. Nennen wir also die Anzahl der wirklichen, an Inhalt verschiedenen Combinationen aus 6 Elementen zur zweiten Classe x (vergl. die letzten Zeilen von § 4), so geben diese $1.2\,x$ Permutationen und weil dann $1.2.x = 6.5$ sein muss, so ist $x = \frac{6\,.\,5}{1\,.\,2} = 15$.

Jede der 6.5 permutirten Combinationen aus den 6 Elementen zur zweiten Classe lässt sich mit jedem der 4 übrigen Elemente verbinden, was 6.5.4 Verbindungen zur dritten Classe giebt. Da nun aber in diesen Verbindungen jedes Element nothwendig wieder auf gleiche Weise vorkommen, d. h. gleich

oft vor, in der Mitte und am Ende stehen muss, so erscheint hier jede Combination in allen ihren Permutationsformen. Nennt man also die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationen aus 6 Elementen zur dritten Classe x, so ist, weil jede derselben $1.2.3$ Permutationen giebt, $1.2.3.x=6.5.4$. Daher $x=\frac{6.5.4}{1.2.3}$.

Setzt man diese Schlussreihe fort, so ergiebt sich die Anzahl der Combinationen aus 6 Elementen zur vierten Classe $=\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$; zur fünften Classe $=\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}$ u. s. w. Allgemein ist also die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur $m$ten Classe

$$P_m.\overset{m}{C}_n = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.\,(n-[m-1]),$$

also, da $P_m = 1.2.3\ldots.m$ ist (§ 9),

$$\overset{m}{C}_n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots..(n-[m-1])}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;m}.$$

13.

Die vorhergehende Formel lässt sich auch auf folgende Weise finden:

123	4567	237	1456
124	3567	245	1367
125	3467	246	1357
126	3457	247	1356
127	3456	256	1347
134	2567	257	1346
135	2467	267	1345
136	2457	345	1267
137	2456	346	1257
145	2367	347	1256
146	2357	356	1247
147	2356	357	1246
156	2347	367	1245
157	2346	456	1237
167	2345	457	1236
234	1567	467	1235
235	1467	567	1234
236	1457		

Denkt man sich die Reihe der zu combinirenden Elemente, z. B. $\overset{3}{C}(1,2,3,4,5,6,7)$, durch einen Einschnitt in zwei Gruppen getheilt, wovon die erste so viel Elemente enthält, als der Exponent der Classe Einheiten hat, und verfährt dann ganz nach der § 11 gegebenen Combinations-Regel, nur mit dem Unterschiede, dass man (gerade wie bei der Permutation) jedesmal die übrigen Elemente in natürlicher Ordnung in der zweiten

Columne folgen lässt, so erhält man offenbar nicht allein die Combinationen zur dritten Classe, sondern zugleich auch die Combinationen zur 7 — 3 = 4ten Classe, jedoch in umgekehrter Ordnung der Vorschrift. Auf die erste niedrigste Form linker Seite folgt die höchste Form rechter Seite, dann auf die nächst höhere linker Hand die nächst niedrigere rechter Hand &c. bis zur höchsten und niedrigsten beiderseits, und es ist klar, dass aus diesem Grunde alle möglichen Combinationen zur dritten und vierten Classe aus den 7 Elementen nothwendig zum Vorschein kommen müssen.

Was nun ihre Anzahl anbetrifft, so sei diese $= \overset{3}{C}_7$. Denkt man sich die Combinationen diesseits des Striches sämmtlich permutirt, so würde man offenbar 1.2.3mal so viel, also $1.2.3.\overset{3}{C}_7$ Formen von 7 Elementen erhalten. Denkt man sich in diesen $1.2.3.\overset{3}{C}_7$ Formen auch noch die, je vier verschiedenen, Elemente hinter dem Striche permutirt, so giebt dies wieder 1.2.3.4mal so viel, mithin $1.2.3.4.1.2.3.\overset{3}{C}_7$. Diese Anzahl muss nun aber mit der Anzahl aller Permutationen aus 7 Elementen übereinstimmen. Daher ist $P_{7-3}.P_3.\overset{3}{C}_7 = P_7$, also

$$1.2.3.4.1.2.3.\overset{3}{C}_7 = 1.2.3.4.5.6.7;$$

woraus

$$\overset{3}{C}_7 = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$$

folgt.

Allgemein ist also die Anzahl aller Combinationen zur $m$ten Classe aus n Elementen durch die Relation

$$P_{n-m}.P_m.\overset{m}{C}_n = P_n$$

gegeben; mithin ist

$$\overset{m}{C}_n = \frac{1.2.3.4\ldots(n-m)\,(n-m+1)\,(n-m+2)\ldots(n-1)n}{1.2.3.4\ldots(n-m)\;.\;1\;.\;2\;\ldots\ldots m}$$

$$\text{oder } \overset{m}{C}_n = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-[m-1])}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots m}.$$

Anmerkung. Aus den vorhergehenden Betrachtungen hat sich zugleich ergeben, dass aus n Elementen eben so viele Combinationen zur $m$ten, als zur $(n-m)$ten Classe möglich sind. Oder es ist

$$\overset{m}{C}_n = \overset{m}{C}_{n-m}.$$

Combinationen mit Wiederholung.

14.

Ausser der im vorigen § erwähnten Combination kommt es auch vor, eine Reihe Elemente zu einer bestimmten Classe so zu combiniren, dass jedes der Elemente in derselben Form bis so oft wiederholt (mit sich selbst verbunden) werden darf, als der Exponent der Classe Einheiten hat. Man nennt dies Combination mit Wiederholung und deutet sie durch das Zeichen C' an. Dies ist dann ganz dasselbe, als wenn man in der Reihe der zu combinirenden Elemente jedes Element so oft vorhanden denkt, als der Classen-Exponent Einheiten hat, so dass also $\overset{3}{C}'(1,2,3,4) = \overset{3}{C}(1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4)$, mithin nur eine kürzere Schreibart.

15.

Aufgabe. Eine Regel anzugeben, nach welcher man die Combinationen mit Wiederholung, z. B. $\overset{4}{C}'(1,2,3,4,5)$ darstellen kann.

Auflösung. Die Regel ist hier ganz dieselbe, wie bei der Combination ohne Wiederholung. Man schreibt nämlich das niedrigste Element so oft hin, als der Classen-Exponent Einheiten hat; setzt dann in die letzte Stelle successive die nächst höheren Elemente aus der gegebenen Reihe. Eben so verfährt man mit der vorletzten, vorvorletzten Stelle &c., indem man aber die darauf folgenden Stellen nicht mit den nächst höheren, sondern mit demselben Element (weil es wiederholt werden

darf) besetzt. Auf diese Weise erhält man aus der niedrigsten Form erst die nächst höhere, aus dieser wiederum die nächst höhere &c. bis zur höchsten Form und mithin alle möglichen Formen in den verschiedenen Ordnungen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. (Die Bedeutung der mit α, β, γ, δ, ε bezeichneten Columnen wird der folgende § geben.)

$$\overset{4}{C}'(1,2,3,4,5)$$

a	α	*b*	β	*c*	γ	*d*	δ	*e*	ε
1111	1234	2222	2345	3333	3456	4444	4567	5555	5678
1112	1235	2223	2346	3334	3457	4445	4568		
1113	1236	2224	2347	3335	3458	4455	4578		
1114	1237	2225	2348	3344	3467	4555	4678		
1115	1238	2233	2356	3345	.				
1122	1245	2234	.	3355	.				
1123	1246	2235	.	3444	.				
1124	.	2244	.	3445	.				
1125	.	2245	.	3455	.				
1133	.	2255	.	3555	3678				
1134	.	2333	.						
1135	.	2334	.						
1144	.	.	.						
1145	.	.	.						
1155	.	.	.						
1222	.	2555	2678						
1223	.								
.	.								
.	.								
1555	1678								

16.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man die Anzahl aller Combinationen mit Wiederholung aus *n* Elementen zur *m*ten Classe berechnen kann.

Auflösung. Man denke sich alle Combinationen mit Wiederholungen, z. B. $\overset{4}{C}'(1,2,3,4,5)$, wirklich hingeschrieben und fol-

gende Veränderung damit vorgenommen: Das Anfangs-Element bleibe in jeder Combination unverändert, die zweite Stelle aber werde um eine Einheit, die dritte Stelle um zwei Einheiten &c. erhöht, wie in § 15 durch die neben *a*, *b*, *c*, *d*, *e* stehenden Reihen α, β, γ, δ, ε angedeutet, so erhellet leicht, dass dadurch aus den Combinationen mit Wiederholung nothwendig just so viele Combinationen ohne Wiederholung zu derselben Classe hervorgehen müssen, jedoch aus so vielen Elementen mehr, als der Exponent der Classe Einheiten hat, weniger eins. So geben z. B. 5 Elemente zur vierten Classe mit Wiederholung genau so viele Combinationen, als $5 + 3 = 8$ Elemente zur vierten Classe ohne Wiederholung, nämlich: $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$. (§ 12.)

Ferner geben 20 Elemente zur fünften Classe mit Wiederholung so viele Combinationen, als $20 + 4 = 24$ Elemente zu derselben Classe ohne Wiederholung, nämlich: $\frac{24.23.22.21.20}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}$.
Allgemein: n Elemente zur $m$ten Classe mit Wiederholung geben so viele Combinationen, als $n + m - 1$ Elemente zur $m$ten Classe ohne Wiederholung. Also in Zeichen:

$$\overset{m}{C}{}'_n = \overset{m}{C}_{n+m-1}\,, \quad \text{oder}$$

$$\overset{m}{C}{}'_n = \frac{(n+m-1)\;(n+m-2)\ldots n}{1\quad.\quad 2\quad\ldots m},$$

oder so geschrieben:

$$\overset{m}{C}{}'_n = \frac{n.(n+1).(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\ldots\; m}.$$

Variation.

17.

Sind mehrere verschiedene Reihen Elemente gegeben und sollen aus ihnen alle möglichen verschiedenen Verbindungen so dargestellt werden, dass jede Verbindung ein Element aus jeder Reihe enthält, also weder Wiederholung noch Permutation

stattfinden darf, so nennt man, wie schon in der Einleitung erwähnt, eine solche Art Combination aus mehreren Reihen: Variation. Der Exponent der Classe ist also hiebei durch die Anzahl der gegebenen Reihen im Voraus bestimmt.

18.

Aufgabe. Ein Verfahren anzugeben, nach welchem man alle möglichen Variationen aus einer gegebenen Anzahl Reihen, z. B. aus den drei: A, B, C, D; a, b, c, d und α, β, γ, δ, darstellen kann.

Auflösung. Man stelle die gegebenen Reihen unter einander:

$$\begin{array}{cccc} A, & B, & C, & D \\ a, & b, & c, & d \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{array}$$

Die Anfangs-Elemente der Reihen zusammengestellt, geben die niedrigste Form, nämlich $Aa\alpha$. Hieraus folgen nach und nach die nächst höheren Formen, indem man in die letzte Stelle successive die nächst höhern Elemente der letzten Reihe setzt, bis dieselbe ganz erschöpft ist. Hierauf wird die vorletzte Stelle durch das nächst höhere Element der bezüglichen (vorletzten) Reihe, die letzte Stelle aber wieder mit dem Anfangs-Element der letzten Reihe besetzt &c., wie nachfolgend angedeutet:

$$\begin{array}{cccc} Aa\alpha & Ba\alpha & Ca\alpha & Da\alpha \\ Aa\beta & Ba\beta & Ca\beta & Da\beta \\ Aa\gamma & Ba\gamma & Ca\gamma & Da\gamma \\ Aa\delta & Ba\delta & Ca\delta & Da\delta \\ Ab\alpha & Bb\alpha & Cb\alpha & Db\alpha \\ Ab\beta & Bb\beta & Cb\beta & Db\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Ad\delta & Bd\delta & Cd\delta & Dd\delta \end{array}$$

Es ist klar, dass man auf diese Weise nothwendig alle Variationsformen, von der niedrigsten, $Aa\alpha$, bis zur höchsten, $Dd\delta$, erhalten muss.

Anmerkung. Hätte man das Product aus den drei viertheiligen Factoren $A+B+C+D$; $a+b+c+d$ und $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ zu entwickeln gehabt, so ist einleuchtend, dass die Theile des Products mit den obigen, durch Variation erhaltenen Formen übereinstimmen müssen; kurzum, dass der Mechanismus der Multiplication durch Variation ersetzt werden kann. Diese Bemerkung ist für die Folge wichtig und deshalb wohl zu beachten.

19.

Um bei der wirklichen Darstellung der Variation durch Einführung der Ziffern, als Stellvertreter der Elemente, eine bequemere und deutlichere Schreibweise zu erhalten, wollen wir alle Anfangs-Elemente der verschiedenen Reihen mit 1, alle zweiten mit 2 &c. bezeichnen. Setzen wir dann noch fest, dass die Stellenzahl in einer Variationsform zugleich diejenige (1ste, 2te etc.) Reihe angiebt, aus welcher das bezügliche Element genommen werden muss, so lassen sich alle Variationen nach der vorhin gegebenen Regel leicht darstellen, wie nachfolgendes Beispiel zeigt:

1	2	3	4
A,	B,	C,	D
a,	b,	c,	d
α,	β,	γ,	δ
111	211	311	411
112	212	312	412
113	213	313	413
114	214	314	414
121	221	321	421
122	222	322	422
123	223	323	423
124	224	324	424
131	231	331	431
132	232	332	432
133	233	333	433
134	234	334	434
141	241	341	441
142	242	342	442
143	243	343	443
144	244	344	444

Anmerkung. Hier scheint es zwar, als ob die Variationsformen, z. B. 112, 121, 211, permutirte Combinationen mit Wiederholung wären. In formeller Hinsicht sind sie es auch, allein in materieller Hinsicht sind sie an Inhalt wirklich verschieden; denn nach verhergehender Bestimmung bedeutet in 112 die erste Stelle das erste Element der ersten Reihe; die zweite Stelle das erste Element der zweiten Reihe und die dritte Stelle das zweite Element aus der dritten Reihe. Es ist nämlich $112 = \mathrm{A}\,a\beta$; eben so ist $121 = \mathrm{A}\,b\alpha$; $211 = \mathrm{B}\,a\alpha$; $142 = \mathrm{A}\,d\beta$ &c.

20.

Aufgabe. Eine allgemeine Regel anzugeben, nach welcher man die Anzahl der möglichen Variationen aus einer gegebenen Anzahl Reihen berechnen kann.

Auflösung. Hat die erste der verschiedenen Reihen n, die zwei Reihe m Elemente, so lässt sich offenbar jedes der m Elemente mit jedem der n Elememte verbindeu, was also $m \,.\, n$ Variationen gäbe. Hat nun die dritte Reihe p Elemente, so kann man wieder die mn Variationen mit jedem der p Elemente verbinden, was dann mnp Variationen giebt &c. Hat man also m verschiedene Reihen von je n Elementen, so ist die Anzahl aller Variationen $\underbrace{n}_{1} . \underbrace{n}_{2} \ldots\ldots \underbrace{n}_{m} = n^m$. In Zeichen

$$\overset{m}{\mathrm{V}}\,(1,2,3\ldots n) = n^m.$$

21.

In § 19 Anmerkung ist schon bemerkt worden, dass die Anzahl aller Variationen aus m Reihen von je n Elementen (was wir durch $\overset{m}{\mathrm{V}}\,(1,2,3\ldots n)$ angedeutet) gleich ist der Anzahl der permutirten Combinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Classe, was wir durch $\mathfrak{p}\,\overset{m}{\mathrm{C}}{}'\,(1,2,3\ldots.n)$

andeuten wollen. Dies giebt uns noch folgenden praktisch wichtigen Satz:

$$\overset{m}{V}(1,2,3\ldots n) = \mathfrak{p}\,\overset{m}{C'}(1,2,3\ldots n).$$

Combination mit Wiederholung zu einer bestimmten Summe.

22.

Unter Combination mit Wiederholung aus n Elementen zur $m$ten Classe zur Summe s (in Zeichen ${}^{s}\overset{m}{C'}[1,2,3\ldots n]$) versteht man: nur diejenigen dieser Combinationen zu der geforderten Classe anzugeben, worin die Quersumme der Elemente immer $= s$ ist. Aus ${}^{12}\overset{4}{C'}(1,2,3\ldots 9)$ hätte man z. B. unter andern: 1119, 1227, 1236 &c. Um alle möglichen dieser Combinationen zu finden (eine Aufgabe, welche zuweilen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt und Discerptionsproblem genannt wird), wird man folgendes Verfahren beobachten: Man schreibe das niedrigste Element der Reihe so oft hin, als der Exponent der Classe Einheiten hat, setze dann in die letzte Stelle von den übrigen Elementen ein solches (nöthigenfalls das höchste), welches, zur Quersumme der vorhergehenden addirt, die verlangte Summe giebt. Kann selbst das höchste Element der Reihe diese Summe nicht hervorbringen, so muss man mit der vorletzten und wenn nöthig mit der vorvorletzten Stelle &c. so verfahren. Auf diese Weise erhält man zuerst die niedrigste Form. Hieraus folgen dann nach und nach die nächst höheren bis zur höchsten, mithin alle möglichen Formen, indem man (wie folgende Beispiele zeigen) von einem höheren Element eine Einheit abnimmt und der vorhergehenden Stelle hinzulegt und dann die rechts folgenden Stellen, so weit möglich, mit gleichen Elementen besetzt und darauf achtet, dass kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Eben so ist es leicht, die Combinationen mit und ohne Wiederholungen zu einer bestimmten Summe zu bilden.

${}^{12}\overset{4}{C}'(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$;

1119
1128
1137
1146
1155
1227
1236
1245
1335
1344
2226
2235
2244
2334
3333

${}^{11}\overset{3}{C}'(1,2,3,4,5,6)$

146
155
236
245
335
344

${}^{11}\overset{3}{C}(1,2,3,4,5,6)$

146
236
245

Variationen zu bestimmten Summen.

23.

Weil, nach § 19, Anmerkung, die Variationen aus m verschiedenen Reihen von je n Elementen (wenn man sie aus den, allen Reihen gemeinschaftlichen Zeigern $1, 2, 3 \ldots n$ bildet) in formeller Hinsicht auch zum Vorschein kommen, wenn man aus den gemeinschaftlichen Zeigern $1, 2, 3 \ldots n$ alle möglichen Combinationen mit Wiederholung zur $m$ten Classe bildet und dann die erhaltenen Formen permutirt, so erhält man offenbar die Anzahl aller Variationen zu einer bestimmten Summe bequemer, indem man die Combinationen mit Wiederholung zu dieser Summe bildet und dann die Permutationszahlen der erhaltenen Formen addirt. In Zeichen:

$${}^{s}\overset{m}{V}(1,2,3\ldots n) = \mathfrak{p}\;{}^{s}\overset{m}{V}'(1,2,3\ldots n)$$

24.

Aufgabe. Wie viele verschiedene Würfe sind mit drei Würfeln möglich und wie viele sind darunter, deren Augenzahl = 12 ist?

Auflösung. Denkt man sich den einen Würfel mit weissen (w), den zweiten mit rothen (r) und den dritten mit blauen (b) Nummern bezeichnet, so erhellt leicht, dass z. B. die Würfe $\underset{wrb}{123}$; $\underset{rwb}{123}$; $\underset{rbw}{123}$ &c. als wirklich verschiedene betrachtet werden müssen. Wir haben hier also drei verschiedene Reihen von je 6 Elementen. Die Anzahl aller verschiedenen Würfe ist also: $\overset{3}{V}(1,2\ldots 6) = 6^3 = 216$. Weil ferner

$$ {}^{12}\overset{3}{V}(1,2,3,4,5,6) = \mathfrak{p}\ \overset{12\ 3}{C}(1,2,3,4,5\,6) $$

ist, so giebt es hier offenbar 25 verschiedene Würfe, deren Augenzahl = 12 ist, denn die drei Formen 156, 246, 345 lassen jede 6, die Formen 255, 336 jede aber nur 3 Permutationen zu, und 444 kommt nur einmal vor.

156	6
246	6
255	3
336	3
345	6
444	1
	25

Zweites Buch.

Binomischer Lehrsatz für ganze Exponenten.

25.

Die Buchstabenberechnung lehrt die Regeln, nach welcher man die entwickelte zweite und dritte Potenz von einer beliebigen zweitheiligen Grösse (Binom) gleich aus dem Gedächtniss hinschreiben kann, nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Es kommt nun aber auch häufig vor, dass man eine viel höhere Potenz von einem Binom zu entwickeln hat, was durch unmittelbare wiederholte Multiplication offenbar sehr mühsam und langwierig sein würde. Da nun aber die entwickelte Potenz z. B. von $(a+b)^{10}$ gewiss nicht willkürlich, sondern durch den Potenzexponenten im Voraus bestimmt ist, so muss offenbar auch ein allgemeines Gesetz (Formel) existiren, nach welchem man die Entwickelung gleich fertig hinschreiben kann. Es entsteht deshalb die Aufgabe, dieses Gesetz zu entdecken und aufzustellen.

26.

Nehmen wir zuerst an, es solle aus verschiedenen zweitheiligen Factoren, z. B. aus sechs: $(a+b), (c+d), \ldots\ldots$ das Product entwickelt werden. Schreibt man diese sechs Factoren unter einander und setzt darüber den gemeinschaft-

lichen Zeiger 1, 2 so könnte man das verlangte Product, zufolge § 18, Anmerkung, durch Variation finden. Es wäre dann, indem man in den erhaltenen Variationen, statt der Zeiger 1, 2, die ihnen und ihren Plätzen entsprechenden Elemente setzt: 111111 so viel als *acegil*; ferner 111112 = *acegim*; 111121 = *acegkl* &c. Es ist hier nämlich 111121 nicht als Permutation von 111112 anzusehen, indem die Zeiger 1 und 2 an verschiedenen Plätzen verschiedene Bedeutung haben. Wären aber, worauf es hier nur ankommt, die 6 zweitheiligen Factoren einander gleich $(a+b)$, so würde der Zeiger 1, an welchem Platze in einer Variationsform er auch stehen möge, immer a und eben so der Zeiger 2 immer b bedeuten und die Variationsformen 111112, 111121, 111211 &c. wären dann an Inhalt gleich (nämlich jede $= a^5b$) und als wirkliche Permutation der Combination 111112 anzusehen. Eben so wären dann 111122, 111212, 111221, 112112 &c. jede $= a^4b^2$. In diesem Falle also, wo die sechs zweitheiligen Factoren alle gleich sind, erhält man das Product derselben, d. i. $(a+b)^6$ weit kürzer, wenn man, wie nebenstehend angedeutet, die Zeiger 1, 2 zur sechsten Classe mit Wiederholung combinirt und jede Form so oft nimmt, als ihre leicht zu berechnende Permutationszahl angiebt.

$$\begin{array}{c} \overset{1}{a} + \overset{2}{b} \\ c+d \\ e+f \\ g+h \\ i+k \\ l+m \\ \hline 111111 \\ 111112 \\ 111121 \\ 111122 \\ 111211 \\ 111212 \\ 111221 \\ \vdots \\ 222222 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overset{1}{a} + \overset{2}{b} \\ a+b \\ a+b \\ a+b \\ a+b \\ a+b \\ \hline 111111 = a^6 \\ 111112 = a^5b \\ 111122 = a^4b^2 \\ 111222 = a^3b^3 \\ 112222 = a^2b^4 \\ 122222 = ab^5 \\ 222222 = b^6 \end{array}$$

Die Form 111111 oder a^6 enthält sechs gleiche Elemente und kommt also nur einmal vor. Dasselbe gilt von der Form 222222 oder b^6. Die Formen 111112, 122222 oder a^5b, ab^5 enthalten jede unter ihren sechs Elementen fünf gleiche, jede Form kommt also $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5} = 6$mal vor (§ 10).

Die beiden Formen 111122 und 112222 oder a^4b^2, a^2b^4, enthalten jede einmal vier

und einmal zwei gleiche Elemente und jede kommt also $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = \frac{6.5}{1.2}$ mal vor.

Die Form $111222 = a^3b^3$ kommt $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = \frac{6.5.4}{3.2.1}$ mal vor, daher:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6.5}{1.2}a^4b^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}a^3b^3 + \frac{6.5}{1.2}a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

27.

Aus vorstehendem § ist nun wohl klar geworden, dass, wenn man allgemein das Product, aus n gleichen zweitheiligen Factoren, d. i. die $n$te Potenz eines Binoms, $(a+b)^n$, zu entwickeln hat, darin die nebenstehend angedeuteten Formen a^n; $a^{n-1}b$; $a^{n-2}b^2$; $a^{n-3}b^3$; .... ab^{n-1}; b^n zum Vorschein kommen müssen und von welchen die erste und letzte Form nur einmal vorkommt. Bezeichnen wir die Coefficienten der übrigen Formen vorläufig mit $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{B}$..., so hat man

$$\begin{array}{c} \overset{1}{\smile}\ \ \overset{2}{\smile} \\ a+b \\ a+b \\ a+b \\ \vdots \\ a+b \\ \hline 1111\ldots111 = a^n \\ 1111\ldots112 = a^{n-1}b \\ 1111\ldots122 = a^{n-2}b^2 \\ \vdots \\ 1122\ldots222 = a^2b^{n-2} \\ 1222\ldots222 = ab^{n-1} \\ 2222\ldots222 = b^n \end{array}$$

$$(a+b)^n = a^n + \overset{1}{B}.a^{n-1}b + \overset{2}{B}.a^{n-2}b^2 + \ldots + \overset{r}{B}.a^{n-r}b^r + \ldots + \overset{n-1}{B}.ab^{n-1} + b^n$$

Die noch zu bestimmenden Coefficienten $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$...., welche die Binomial-Coefficienten heissen, sind, wie schon bemerkt, nichts Anderes, als die Permutationszahlen der Formen, vor welchen sie stehen, und deshalb leicht zu berechnen.

Jede Form a^n, $a^{n-1}b$ &c. enthält n Elemente, indem jede

folgende Form ein a verliert und dafür ein b wieder aufnimmt.

Die Form a^n kommt nur einmal vor.

Die Form $a^{n-1}b$ enthält n Elemente, worunter $n-1$ gleiche, daher (§ 10)

$$\overset{1}{B} = \frac{1.2.3.4\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3.4\ldots(n-2)\,(n-1)} = n.$$

Die folgende Form, $a^{n-2}b^2$, enthält wieder n Elemente, worunter einmal $n-2$ gleiche und einmal 2 gleiche, daher

$$\overset{2}{B} = \frac{1.2.3\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-2)\,.\,1\,.\,2} = \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}.$$

Allgemein ist der $r$te Binomial-Coefficient

$$\overset{r}{B} = \frac{1.2.3\ldots(n-r)\,(n-r+1)\,(n-r+2)\ldots(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-r)\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,r},$$

$$\overset{r}{B} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}.$$

Folglich auch

$$\overset{r}{B} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,r}\cdot\frac{(n-r)\,(n-r-1)\ldots(r+2)\,(r+1)}{(r+1)\,(r+2)\ldots(n-r-1)\,(n-r)}$$

$$= \frac{n\,(n-1)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-r)}$$

oder $\overset{r}{B} = \overset{n-r}{B}$; z. B. $\overset{n-1}{B} = \overset{1}{B}$, $\overset{n-2}{B} = \overset{2}{B}$.

Die Coefficienten, welche von Anfang und Ende gleich weit abstehen, sind also einander gleich und man braucht deshalb dieselben nur bis zum mittelsten Gliede zu berechnen und die folgenden in umgekehrter Ordnung nur wieder abzuschreiben. (Vergl. die Anmerk. zu § 13.)

Daher ist nun, weil n eine ganze Zahl ist, ganz allgemein*)

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3 + \ldots + n.ab^{n-1} + b^n$$

*) Diese zuerst von Newton gefundene Binomialformel, von der wir in der Folge zeigen werden, dass sie unter Umständen auch für gebrochene und negative Exponenten gültig ist, soll Newton zu Ehren

28.

Wir fügen vorstehender wichtigen Formel noch ein paar sich von selbst aufdringende Bemerkungen hinzu:

1. Die $n$te Potenz eines Binoms hat allemal $n+1$ Glieder.

2. Ist der eine Theil des Binoms, z. B. b, negativ, so sind natürlich alle diejenigen Glieder in der Entwickelung negativ, in welchen b in einer ungeraden Potenz erscheint. So ist z. B.

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.$$

29.

Aufgabe. Man entwickele nach der Binomialformel folgende Potenzen: $(a+b)^7$; $(1+x)^n$; $(x+1)^n$; $(a+b)^{n+1}$.

Auflösung. Man hat

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7,$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n.n-1}{1\,.\,2}x^2+\frac{n.n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\ldots+nx^{n-1}+x^n,$$

$$(x+1)^n=x^n+nx^{n-1}+\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}x^{n-2}+\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}+\ldots+nx+1,$$

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^nb+\frac{(n+1).n}{1\,.\,2}a^{n-1}b^2+\frac{(n+1)n.(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-2}b^3+\ldots$$
$$+(n+1)ab^n+b^{n+1}.$$

30.

Da die Binomialformel

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$$

---

auf seinem Denkmal, in der Westminster-Abtei, eingegraben sein; sie ist in der That so wichtig, dass man sie mit Recht das Fundament der ganzen höhern Mathematik nennt.

für jeden Werth von a und b gültig ist, so kommt, wenn man $a = 1$ und $b = 1$ setzt, $(1 + 1)^n$, nämlich:

$$2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\;.\;2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\;.\;2\;.\;3} + \ldots. + 1$$

und hieraus

$$2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\;.\;2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\;.\;2\;.\;3} + \ldots.. + 1$$

Zufolge § 12 drückt das Glied $\frac{n}{1}$ die Anzahl aller möglichen Combinationen aus n Elementen zur ersten Classe aus, das folgende Glied $\frac{n.n-1}{1\;.\;2}$ die Anzahl der Combinationen zur zweiten Classe &c. Es ist mithin die Anzahl aller Combinationen aus n Elementen zu allen möglichen: ersten, zweiten, dritten &c. bis $n$ten Classe $= 2^n - 1$.

31.

Setzt man in der Binomialformel $a = 1$ und $b = -1$, so kommt $(1 - 1)^n$, nämlich:

$$0 = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\;.\;2} - \frac{n.n-1.n-2}{1\;.\;2\;.\;3} + - \ldots \pm 1$$

und hieraus

$$1 = \frac{n}{1} - \frac{n.n-1}{1\;.\;2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\;.\;2\;.\;3} - + \ldots \mp 1.$$

Hier drückt die Summe der positiven Glieder der rechten Seite die Anzahl der Combinationen zu allen möglichen ungeraden und die Summe der negativen Glieder die Anzahl der Combinationen aller geraden Classen aus n Elementen aus. Die Anzahl aller ungeraden Combinationen aus n Elementen ist also immer um eine Einheit grösser, als die Anzahl aller geraden Combinationen. Dies ist ein merkwürdiges Factum der Rechnung. Greift man blindlings in einen beliebigen Haufen gleicher Elemente (z. B. gleicher Geldstücke, Kugeln &c.), so ist es den Regeln der Wahrscheinlich-

keitsrechnung wahrscheinlicher, eine ungerade als eine gerade Anzahl in der Hand zu haben.

32.

Addirt man die beiden gefundenen Gleichungen

$$2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1\,.\,2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots . + 1$$

$$1 = \frac{n}{1} - \frac{n.n-1}{1\,.\,2} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} - + \ldots \mp 1,$$

so erhält man

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = \frac{n}{1} + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots .. ,$$

folglich ist die Anzahl der Combinationen aller ungeraden Classen aus n Elementen $= 2^{n-1}$ und mithin die aller geraden Classen $= 2^{n-1} - 1$ (weil ja, § 31, die Anzahl aller ungeraden Classen um eine Einheit grösser ist, als die der geraden).

33.

Unter den Binomial-Coefficienten unmittelbar auf einander folgender Potenzen finden hinsichtlich ihrer Summen, Producte &c. mehrere merkwürdige Sätze statt, wovon wir jedoch nur einen, weil für die Folge wichtig, hier aufnehmen.

Entwickelt man nämlich mehrere auf einander folgende Potenzen eines Binoms, z. B.:

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

so zeigt sich, dass allgemein die Summe des $r$ten und $r+1$ten Coefficienten irgend einer Potenz gleich ist dem $r+1$ten Coefficienten der nächst folgenden Potenz. Deutet man den $r$ten Coefficienten der $n$ten Potenz durch ${}^n\overset{r}{B}$, den $r+1$ten

Coefficienten derselben Potenz durch ${}^{n}\overset{r+1}{B}$ und durch ${}^{n+1}\overset{r+1}{B}$ den $r+1$ten Coefficienten der $n+1$ten Potenz an, so ist

$$ {}^{n+1}\overset{r+1}{B} = {}^{n}\overset{r}{B} + {}^{n}\overset{r+1}{B}. $$

Es ist nämlich nach § 27

$$ {}^{n}\overset{r}{B} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ r}, $$

$$ {}^{n}\overset{r+1}{B} = \frac{n.(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ldots\ldots(n-r+1)\ (n-r)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ldots\ r\ .\ (r+1)}. $$

Addirt man diese beiden Coefficienten, indem man gleich den ersten als gemeinschaftlichen Factor heraussetzt, so ist

$$ {}^{n}\overset{r}{B} + {}^{n}\overset{r+1}{B} = \frac{n.n-1.n-2..(n-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ r}\left(1+\frac{n-r}{r+1}\right) $$

$$ = \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-r+1).(n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ r\ \ (r+1)} $$

$$ = \frac{n+1.n.n-1.n-2\ldots(n-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ (r+1)}. $$

Letzterer Ausdruck ist offenbar der $(r+1)$te Coefficient von $(a+b)^{n+1}$, mithin der behauptete Lehrsatz bewiesen.

Schlussbemerkung. Hier mag noch eine elementare Ableitung des binomischen Lehrsatzes Raum finden.

Man entwickele aus $(a+b)^2$ durch Multiplication mit $a+b$: $(a+b)^3$ u. s. w. So ergeben sich als Coefficienten

für die 10. Potenz: 1, 10, 45, 120, 210,...
„ „ 12. „ 1, 12, 66, 220, 495,...

Zunächst ist ersichtlich, dass

$$ (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots\ldots $$

Nach dem Satze $A = B.\frac{A}{B}$ ist ferner

der 3. C o e f f i c i e n t = 2. Coefficient $\times$ $\frac{\text{3. Coefficient}}{\text{2. Coefficient}}$;

für die 10. Potenz $= 10.\frac{45}{10} = 10.\frac{9}{2}$

„ „ 12. „ $= 12.\frac{66}{12} = 12.\frac{11}{2}$.

Der 4. Coefficient $=$ 3. Coefficient $\times \frac{\text{4. Coefficient}}{\text{3. Coefficient}}$;

für die 10. Potenz $= 45 . \frac{120}{45} = 10 . \frac{9}{2} . \frac{8}{3}$ u. s. w.

Mithin sind die Coefficienten

der 10. Potenz $= 1,\ 10,\ \frac{10.9}{1.2},\ \frac{10.9.8}{1.2.3},\ \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}, \ldots$

der 12. Potenz $= 1,\ 12,\ \frac{12.11}{1.2},\ \frac{12.11.10}{1.2.3}, \ldots$

und durch Induction ergeben sich die Coefficienten der

n. Potenz: $1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \ldots$

Drittes Buch.

Arithmetische Reihen höhern Ranges.

34.

In der Einleitung zur höhern Geometrie ist der hier als bekannt vorauszusetzende Begriff einer veränderlichen Grösse, so wie auch der Begriff Function einer veränderlichen Grösse gegeben und durch Beispiele erläutert worden (pag. 14). Auch ist daselbst schon die Eintheilung aller Functionen in transscendente und algebraische erwähnt. Wenn nämlich in einer Function von x die veränderliche Grösse x als Exponent, Logarithmus oder auch als Bogen oder Winkel vorkommt, z. B. a^x, log x, sin x &c., so heissen solche Functionen transscendente, alle übrigen dagegen heissen algebraische.*)

Die algebraischen Functionen heissen rational, wenn die veränderliche Grösse mit keinem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist. Ist dies aber der Fall, so heissen sie irrational.

---

*) Diese bisher allgemein gültigen, aber unlogischen Definitionen für „algebraische und transscendente Functionen und Gleichungen" glaubt der Bearbeiter dieser Auflage durch die nachstehenden ersetzen zu müssen.

Ein aus einer endlichen Anzahl von Gliedern der Form ax^r bestehender Ausdruck ist ein algebraischer; ein transscendenter dagegen, wenn sich derselbe nur als eine unendliche Reihe von Gliedern jener Form darstellen lässt, wie es bei a^x, $lg\ x$, sin x u. s. w. der Fall ist.

Die algebraischen rationalen Functionen heissen kurzweg: ganze Functionen, wenn die veränderliche Grösse darin nicht als Divisor vorkommt; ist dies aber der Fall, so heissen sie gebrochene Functionen und zwar echt gebrochen, wenn die veränderliche Grösse im Nenner einen höhern Exponenten hat als im Zähler. So ist z. B. $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x^3}$ eine echt gebrochene, $\frac{a+bx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ dagegen eine unecht gebrochene Function.

Die ganzen Functionen unterscheidet man ferner nach Graden, welche der höchste Exponent angiebt, $a+bx+cx^2$; $a+cx^2$; cx^2 sind z. B. alle drei vom zweiten Grade.

Eine Function heisst eine gerade Function, wenn sie für gleiche entgegengesetzte Werthe der veränderlichen Grösse vollkommen gleiche Resultate giebt. Solche sind z. B. $a+bx^2+cx^4$, $\cos x$, c^{xx}, r^2-x^2 &c., denn ob hierin $x=h$ oder $x=-h$ genommen wird, man erhält doch dasselbe Resultat. Diejenigen Functionen dagegen, welche für gleiche entgegengesetzte Werthe der veränderlichen Grösse gleich grosse, aber entgegengesetzte Resultate geben, heissen ungerade Functionen. Solche sind z. B. $ax+bx^3+cx^5$, $\sin x$ &c.

Wenn schliesslich für keinen endlichen Werth einer veränderlichen Grösse der Betrag der daraus gebildeten Function weder unendlich noch imaginär wird, so heisst die Function stetig (continuirlich), sonst unstetig (discontinuirlich). Unstetig sind z. B. $\sqrt{x^2-a^2}$, $\frac{a}{x^3}$, $\frac{a}{x-b}$, weil erstere für alle Werthe von x, die kleiner als a sind, also zwischen den Grenzen von $x=0$ bis $x=\pm a$ imaginär, die zweite für $x=0$ und die dritte für $x=b$ unendlich wird.

35.

Sei nun y irgend eine Function von x; in Zeichen $y=\varphi(x)$, so ist in der höhern Geometrie gezeigt, dass eine Function zweier veränderlicher Grössen, wenn man darin die absolut

veränderliche sich stetig ändern lässt, eine geometrische Bedeutung hat, nämlich (im Allgemeinen) irgend eine Linie darstellt.

Lassen wir nun aber in der Function, $y = \varphi(x)$, die absolut veränderliche Grösse x nicht stetig sich ändern, sondern sprungweise und zwar immer um gleiche Intervalle, z. B. $x = 1, 2, 3, 4 \ldots$ und berechnen den jedesmaligen Betrag der Function, so erhält dieselbe eine rein arithmetische Bedeutung. Sie stellt dann keine Linie, sondern eine Reihe von Zahlen dar, die wie die entsprechende Linie begrenzt sein, oder auch in's Unendliche fortlaufen, so wie auch für gewisse Werthe von x unterbrochen sein kann.

36.

In geometrischer Hinsicht heisst $\varphi(x)$ das Gesetz, nach welchem die räumliche Grösse sich bildet, und wir wissen, dass diese an Gestalt und Eigenschaften dadurch vollkommen bestimmt ist. Eben so kann man in arithmetischer Hinsicht sagen, dass durch $\varphi(x)$ die daraus entspringende Reihe von Zahlen im Voraus sammt allen ihren etwaigen Merkwürdigkeiten vollkommen bestimmt ist und die $\varphi(x)$ deshalb das Gesetz (allgemeine Glied) der daraus entspringenden Zahlenreihe nennen, und es ist klar, dass jede andere Function von x (im Allgemeinen) eine andere Reihe von Zahlen giebt, und $\varphi(x)$ also auch eine unerschöpfliche Quelle von Zahlenreihen darstellt.

37.

Wir können diese Vergleichung der Arithmetik mit der Geometrie noch weiter fortsetzen, denn so unähnlich sie in jeder andern Hinsicht sind, so haben sie doch in ihrem Zweck und Wesen eine gewisse Aehnlichkeit.

So wie nämlich die höhere Geometrie aus der willkürlich aufgeworfenen Function $y = \varphi(x)$ das darin enthaltene Bild und dessen Merkwürdigkeiten darzustellen sucht, so wie auch aus einer mechanischen Entstehungsweise oder gegebenen Eigenschaften einer räumlichen Grösse ihr eigentliches (arithmetisches) Gesetz aufsucht, aus welchem alle übrigen Eigenschaften, so

wie die Rectification und Quadratur derselben gefunden werden kann, so soll dagegen die Analysis in ähnlicher Weise die in der willkürlich aufgeworfenen Function, $y = \varphi(x)$, enthaltene Zahlenreihe, so wie alle ihre Merkwürdigkeiten darstellen und umgekehrt, wenn eine auf andere Weise gebildete Zahlenreihe gegeben ist, z. B. die mittleren täglichen Thermometer- oder Barometerstände &c., das darin herrschende allgemeine Gesetz aufsuchen, nach welchem jedes beliebige Glied der Reihe bestimmt, so wie auch die etwaigen Eigenschaften der Reihe, die Summe einer bestimmten Anzahl Glieder &c., gefunden werden kann.

38.

Nichts in der Natur ist gesetzlos, und um die mannichfachen Erscheinungen erklären und voraussagen zu können, kommt es nur darauf an, die Gesetze, nach welchen die Natur wirkt, zu entdecken. Die Forschungen nach Naturgesetzen führen aber fast immer auf räumliche Gestalten oder auf Zahlenreihen, in welchen sie liegen. Deshalb gewährt auch die Speculation über räumliche Grössen und Zahlenreihen nicht allein wissenschaftliches, sondern auch praktisches Interesse. Die Zahlenreihen sind besonders für die Experimental-Physik von grosser Wichtigkeit, weil man durch dieselben eine veränderliche, aber deshalb nicht zufällige Erscheinung unter einem sich immer gleich bleibenden Gesetze aufzufassen sucht.

Die Betrachtung der Zahlenreihe hat auf manche glückliche Entdeckung in der Mathematik selbst geführt. Leibnitz und Newton sind dadurch auf die Erfindung und Begründung der Differential- und Integralrechnung gekommen. Ohne Kenntniss der Zahlenreihen würde Babbage seine merkwürdige Rechenmaschine nicht erfunden haben.

39.

Da es unzählige verschiedene Functionen von einer veränderlichen Grösse und mithin auch unzählig viele Zahlenreihen giebt, so ist es offenbar unthunlich, jede besondere

Zahlenreihe mit einem besonderen Namen zu benennen. Wir müssen deshalb, um Ordnung zu erhalten, die verschiedenen Zahlenreihen in Classen zu bringen suchen, wovon jede eine ganze Sippschaft begreift, und hiezu verhilft uns die § 34 erwähnte Eintheilung der verschiedenartigen Functionen. Denn es lässt sich muthmassen, dass Reihen, welche aus einerlei Art Functionen entspringen, bei all ihrer sonstigen Verschiedenheit, dennoch ähnliche Merkmale besitzen werden.

Wir betrachten deshalb zuerst die einfachste Art Reihen, deren Bildungsgesetz eine ganze Function ist und mithin die Form: $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$ hat (§ 34). So wie man nun übereingekommen ist, alle Linien, die aus einer ganzen Function entspringen, kurzweg parabolische Linien zu nennen*) und sie nur nach dem durch den höchsten Exponenten von x bestimmten Grade zu unterscheiden, so ist man ebenfalls übereingekommen, alle aus solchen ganzen Functionen hervorgehende Reihen kurzweg arithmetische Reihen zu nennen und sie bloss nach dem Range ihrer Function zu unterscheiden.

40.

Um das Vorhergehende zuerst durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, sei

$$y = 2x^3 - x + 1.$$

Setzen wir für die absolut veränderliche Grösse x nach und nach die auf einander folgenden Zahlen 0, 1, 2, 3......, welche zugleich die Zeiger (Stellenzahlen, Indices) der entsprechenden Glieder andeuten, so erhalten wir folgende Reihe, welche der gegebenen Erklärung zufolge eine arithmetische Reihe dritten Ranges ist:

$$\overset{0}{1},\quad \overset{1}{2},\quad \overset{2}{15},\quad \overset{3}{52},\quad \overset{4}{125},\quad \overset{5}{246}\ldots.$$

Betrachten wir nun diese Reihe, so scheint auf den ersten Blick die grösste Unregelmässigkeit darin zu herrschen. Gleich-

*) Die gewöhnliche Parabel ist als specieller Fall darin enthalten.

wohl wissen wir, dass kein blinder Zufall die Glieder derselben zusammengewürfelt hat, vielmehr jedes derselben nach einem und demselben Gesetze $\varphi(x) = 2x^3 - x + 1$ entsprungen ist und dass Jeder, der dieses Gesetz kennt, im Stande ist, jedes andere Glied sofort zu bestimmen. Wollen wir z. B. das zehnte Glied, so ist dieses $= 2.10^3 - 10 + 1 = 1991$. Dieser Reihe, so wie allen übrigen arithmetischen Reihen sind offenbar nur willkürliche Grenzen zu setzen, d. h. wir können sie beliebig weit fortsetzen und zwar nach beiden Seiten, denn setzen wir statt x auch nach und nach -1, -2... so erhält man:

$$\begin{matrix} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \cdots & -50, & -13, & 0, & 1, & 2, & 15, & 52, & 125 & \cdots \end{matrix}$$

Und eine solche nach beiden Seiten unbegrenzte Zahlenreihe könnte, im Fall sie das Gesetz irgend einer veränderlichen Naturerscheinung darstellte, ein Bild der Zeit sein. Von einer bestimmten Epoche aus könnte man sowohl vorwärts als rückwärts schauen und sehen, was war, ist und sein wird.

41.

Man kann aus dem bekannten Gesetze einer arithmetischen Reihe durch eine leichte Umformung ein anderes von gleichem Range für dieselbe Reihe ableiten, nach welchem jedes beliebige Glied derselben zum ersten wird. Die Function

$$y = 2x^3 - x + 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

giebt die Reihe:

$$\begin{matrix} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \ldots & -13, & 0, & 1, & 2, & 15, & 52, & 125 & \ldots \end{matrix}$$

in welcher 2 das erste Glied ist, indem für $x = 1 : y = 2$ wird.

Um nun für dieselbe Reihe das Gesetz zu erhalten, nach welchem nicht 2, sondern 15 als erstes Glied erscheint, braucht man nur in Gleichung (1) $x + 1$ statt x zu setzen, so erhält man:

$$y = 2(x+1)^3 - (x+1) + 1 \ldots\ldots (2)$$

denn setzt man in (2) $x = 1$, so kommt offenbar dasselbe, als

wenn man in (1) $x = 2$ setzt &c. Die Gleichung (2) oder, indem man die Klammern auflöst, die Gleichung:

$$y = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$$

giebt nun für $x = 0, 1, 2 \ldots$, $y = 2, 15, 52 \ldots$ Soll in obiger Reihe 52 das erste Glied sein, so würde man in (1) $x + 2$ statt x, und wenn 1 das erste Glied sein soll, $x - 1$ statt x setzen &c. (Vergl.: Höhere Geometrie § 68.)

42.

Liegt nun irgend eine gesetzmässige Reihe von Zahlen vor uns, so können wir aus derselben sogenannte Differenzreihen bilden, indem wir jedes Glied von dem nächstfolgenden abziehen. Die auf einander folgenden Differenzen bilden dann eine andere Zahlenreihe, welche die erste Differenzreihe heisst. Mit dieser können wir dann eben so, wie mit der gegebenen oder sogenannten Hauptreihe verfahren und erhalten dann die zweite Differenzreihe &c.

Sei z. B. das Gesetz oder allgemeine Glied der Hauptreihe

$$y = 2x^3 - x + 1,$$

so ist die

	1	2	3	4	5	6
Hauptreihe	2,	15,	52,	125,	246,	427..
I. Differenzreihe..	13,	37,	73,	121,	181..	
II. „ ..	24,	36,	48,	60..		
III. „ ..	12,	12,	12..			

43.

Es ist klar, dass alle Differenzreihen durch die Hauptreihe im Voraus bestimmt, und wenn auch nach andern Gesetzen gebildet, so doch gesetzmässig sein werden und dass die Gesetze (allgemeinen Glieder), nach welchen sie entspringen, aus dem Gesetze für die Hauptreihe sich müssen ableiten lassen. Um z. B. aus dem allgemeinen Gliede, der Hauptreihe des vorigen §, nämlich

$$y = 2x^3 - x + 1,$$

das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe, welches wir mit $\triangle y$ bezeichnen wollen, zu finden, überlege man die Sache so: Subtrahirt man das erste Glied der Hauptreihe von dem zweiten, so erhält man das erste Glied der ersten Differenzreihe. Subtrahirt man das zehnte Glied der Hauptreihe vom elften, so erhält man das zehnte Glied der ersten Differenzreihe &c. Setzt man also in dem allgemeinen Gliede der Hauptreihe $2x^3 - x + 1$ einmal $x = 100$ und dann $x = 101$ und subtrahirt das erste Resultat vom zweiten, so erhält man offenbar das hundertste Glied der ersten Differenzreihe

$$= 2 \cdot 101^3 - 101 + 1 - (2 \cdot 100^3 - 100 + 1)$$

und wenn man statt 100 und 101 ganz allgemein x und $x + 1$ setzt, so erhält man offenbar das $x$te (allgemeine) Glied der 1ten Differenzreihe, welches wir mit $\triangle y$ bezeichnen, so dass also

$$\triangle y = 2(x+1)^3 - (x+1) + 1 - (2x^3 - x + 1)$$

oder, die Klammern aufgelöst,

$$\triangle y = 6x^2 + 6x + 1$$

das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe. Diese ist also wieder eine arithmetische Reihe und zwar von einem Range niedriger. Setzt man hierin $x = 1, 2, 3 \ldots$, so kommt die Reihe: 13, 37, 73...

Da man nun offenbar auch allgemein das $x$te Glied der zweiten Differenzreihe erhält, wenn man das $x$te Glied der ersten Differenzreihe vom $x + 1$ten subtrahirt, so ist, indem wir das Resultat mit $\triangle^2 y$ bezeichnen:

$$\triangle^2 y = 6(x+1)^2 + 6(x+1) + 1 - (6x^2 + 6x + 1).$$

Es ist also

$$\triangle^2 y = 12x + 12$$

das allgemeine Glied der zweiten Differenzreihe, welche also wiederum von einem Range niedriger, nämlich vom ersten Range, also die gewöhnliche (gemeine) arithmetische Progression ist. Setzt man $x = 1, 2, 3 \ldots$, so kommt die Reihe:

24, 36, 48... Subtrahirt man wieder das $x$te Glied der zweiten Differenzreihe vom $x+1$ten, so erhält man das allgemeine Glied der dritten Differenzreihe, nämlich

$$\triangle^3 y = 0 \,.\, x + 12 = 12.$$

Diese Betrachtungen führen uns auf folgenden merkwürdigen Satz:

44.

Lehrsatz. Jede arithmetische Reihe vom $n$ten Range (oder von der n. Ordnung) giebt immer n und nur n Differenzreihen. Unter den Gliedern der $n$ten Differenzreihe giebt es nämlich keine Differenzen mehr, sie sind alle einander gleich und zwar gleich der vollen Permutationszahl aus dem höchsten Exponenten der veränderlichen Grösse, multiplicirt mit dem constanten Coefficienten, womit die höchste Potenz im Allgemeinen Gliede behaftet ist. In Zeichen: wenn

$$y = \mathrm{A}x^n + \mathrm{B}x^p + \ldots. + \mathrm{T} \ldots.$$

das allgemeine Glied der Hauptreihe und n der grösste Exponent ist, so hat diese Reihe, was auch die übrigen auf das höchste Glied $\mathrm{A}x^n$ folgenden niedrigeren Glieder sein mögen, immer n Differenzreihen und in der $n$ten (letzten) Differenzreihe ist jedes Glied $= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots. n \,.\, \mathrm{A}$.

Beweis. Subtrahirt man das $x$te Glied vom $x+1$ten, so erhält man das $x$te (allgemeine) Glied der 1ten Differenzreihe, nämlich

$$\triangle y = \mathrm{A}(x+1)^n + \mathrm{B}(x+1)^p + \ldots. + \mathrm{T} - (\mathrm{A}x^n + \mathrm{B}x^p + \ldots + \mathrm{T})$$

oder entwickelt (weil [§ 29] $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \ldots.$ kürzer:

$$\triangle y = n\mathrm{A}x^{n-1} + \mathrm{B}_1 x^{n-2} + \ldots. + \mathrm{T}_1.$$

Die hier auf das höchste Glied, $n \,.\, \mathrm{A}x^{n-1}$, folgenden niedrigern Glieder $\mathrm{B}_1 x^{n-2}$ &c. brauchen wir für die Beweisführung nicht zu kennen, indem sie (weil zuerst herausfallend) auf die fragliche allerletzte Differenzreihe keinen Einfluss haben können.

Aus dem gefundenen höchsten Gliede $n \,.\, \mathrm{A}x^{n-1}$ des Gesetzes

für die erste Differenzreihe könnte man nun auf dieselbe Weise das höchste Glied des Gesetzes für die zweite Differenzreihe ableiten. Man sieht aber leicht, dass man dies viel kürzer erhalten kann. Denn so wie aus dem höchsten Gliede für die Hauptreihe, $Ax^n + \ldots + T$, das höchste Glied der ersten Differenzreihe entspringt, indem man den Coefficienten A mit dem Exponenten der veränderlichen Potenz multiplicirt und diese Potenz um eine Einheit verringert, nämlich: nAx^{n-1}, so muss offenbar aus diesem höchsten Gliede für die erste Differenzreihe, indem wir nur diesen Schluss wiederholen, das höchste Glied für die zweite Differenzreihe entspringen, nämlich: $(n-1).nAx^{n-2}$ &c. Mithin ist

$$\triangle^2 y = (n-1).nAx^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots$$
$$\triangle^3 y = (n-2).(n-1).nAx^{n-3} + \ldots$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{10} y = (n-9)(n-8)\ldots(n-1)nAx^{n-10} + \ldots \text{ d. i.}$$
$$\triangle^{10} y = [n-(10-1)][n-(10-2)]\ldots\ldots(n-1)nAx^{n-10} + \ldots\ldots, \text{ folglich}$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{n-1} y = [n-(n-1-1)][n-(n-1-2)]\ldots.(n-1)nAx^{n-(n-1)}, \text{ oder}$$
$$\vdots$$
$$\triangle^{n-1} y = 2.3.4\ldots(n-1)nAx + T_{n-1}.$$

Es ist also $2.3.4\ldots.(n-1)nAy + T_{n-1}$ das allgemeine Glied der $(n-1)$ten Differenzreihe, indem wir mit T_{n-1} den etwaigen constanten Theil bezeichnen.

Subtrahirt man nun schliesslich das $x$te Glied der $(n-1)$ten Differenzreihe vom $x+1$ten, so erhalten wir das $x$te Glied der $n$ten Differenzreihe, nämlich

$$\triangle^n y = 2.3.4\ldots.nA(x+1) + T_{n-1} \div (2.3.4\ldots.nAx + T_{n-1})$$

oder

$$\triangle^n y = 0.x + 1.2.3\ldots.(n-1)nA.$$

Da nun dieses allgemeine Glied für die $n$te Differenzreihe kein x mehr enthält, indem für jeden Werth von $x = 1, 2, 3 \ldots.$ doch immer $0.x = 0$ ist, so ist klar, dass jedes Glied der $n$ten Differenzreihe $= 1.2.3\ldots.nA$ ist, wie der Lehrsatz behauptet.

45.

Der vorstehende Lehrsatz lässt sich noch allgemeiner so aussprechen: *)

Setzt man in einer ganzen Function $y = Ax^n + \ldots + T$, für die veränderliche Grösse x erst einen ganz beliebigen Werth, den wir mit x_0 bezeichnen wollen und dann immer um eine ganz beliebige Grösse, h, mehr, d. h. setzen wir statt x nach und nach x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h \ldots$ (so wie auch abnehmend $x_0 - h$, $x_0 - 2h \ldots$), so erhält man eine arithmetische Reihe, welche n Differenzreihen giebt. In der $n$ten (letzten) Differenzreihe ist dann jedes Glied $= 1.2.3 \ldots n A . h^n$. **)

Nennen wir hier die Glieder der Hauptreihe, welche für $x = x_0 + 0.h, = x_0 + h, = x_0 + 2h \ldots$ entspringen, das 0te, 1ste, 2te Glied &c., so erhält man offenbar das $r$te Glied der ersten Differenzreihe, wenn man das $r$te Glied der Hauptreihe vom $r+1$ten subtrahirt. Um nun die allgemeine Richtigkeit des behaupteten Satzes einzusehen, setzen wir in das allgemeine Glied der Hauptreihe

$$y = Ax^n + Bx^p + \ldots + T$$

statt x einmal $x + h$ und einmal x, und subtrahiren das letztere Resultat vom ersteren, so hat man für das $x$te (allgemeine) Glied der 1sten Differenzreihe den Ausdruck

$$\triangle y = A(x+h)^n + B(x+h)^p + \ldots + T - (Ax^n + Bx^p + \ldots + T) \ldots (1),$$

---

*) Dieser und der folgende 46ste § hängen mit dem Folgenden nicht zusammen und können deshalb auch überschlagen werden.

**) Sei zur Erläuterung x^3 das allgemeine Glied und $x_0 = 3$, $h = 2$, setzen wir also statt x nach und nach 3, 5, 7, 9...., so kommt:

	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
Hauptreihe	−27,	−1,	1,	27,	125,	343,	729,	1331 ....
Differenzreihen:		26,	2,	26,	98.	218,	386,	602....
			−24,	24,	72,	120,	168,	216....
				48,	48,	48,	48	....

und in der dritten (letzten) Differenzreihe ist jedes Glied, wie behauptet, $= 1.2.3.2^3 = 48$.

denn setzt man hierin nach und nach $x_0 + h$, $x_0 + 2h \ldots$ statt x, so ist das so viel, als wenn man das erste Glied der Hauptreihe vom zweiten, das zweite vom dritten, ... subtrahirt und man erhält also das erste, zweite ..... Glied der ersten Differenzreihe, welche man mit $\triangle y_1$, $\triangle y_2 \ldots$ bezeichnet. Der Ausdruck (1) giebt nämlich für $x = x_0 + h$:

$$\triangle y_1 = A(x_0+2h)^n + B(x_0+2h)^p + \ldots + T - [A(x_0+h)^n + B(r_0+h)^p + \ldots + T]$$

und für $x = x_0 + 2h$:

$$\triangle y_2 = A(x_0+3h)^n + B(x_0+3h)^p + \ldots + T - [A(x_0+2h)^n + B(x_0+2h)^p + \ldots + T]$$

Reduciren wir den obigen Ausdruck (1) auf seine kürzere Form, indem wir die Klammern auflösen, so ist:

$$\triangle y = A(x^n + nx^{n-1}h + \ldots + h^n) + B(x^p + px^{p-1}h + \ldots + h^p) + \ldots + T - (Ax^n + Bx^p + \ldots + T)$$

$$\triangle y = nAh.x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots . T_1.$$

Man sieht also, dass das allgemeine Glied für die erste Differenzreihe von einem Range niedriger ist, als das der Hauptreihe. Wollte man dies allgemeine Glied genau kennen, so müsste man alle auf das höchste Glied $nAh.x^{n-1}$ folgenden niedrigeren, hier nur angedeuteten Glieder wirklich berechnen. Für die Beweisführung unseres Satzes ist dies aber nicht nöthig, weil sie auf die $n$te (letzte) Differenzreihe keinen Einfluss haben.

Durch ein ähnliches Raisonnement, wie in § 44, ergeben sich nun die allgemeinen Glieder der 2ten, 3ten .... $n$ten Differenzreihen, nämlich:

$$\begin{aligned}
\triangle^2 y &= (n-1)\,nAh^2 . x^{n-2} + \ldots . \\
\triangle^3 y &= (n-2)(n-1)\,nAh^3 x^{n-3} + \ldots . \\
&\vdots \\
\triangle^{n-1} y &= 2 . 3 . 4 \ldots . nAh^{n-1} . x^1 + T_{n-1} \\
\triangle^n y &= 1 . 2 . 3 \ldots . nAh^n .
\end{aligned}$$

46.

Aus vorstehendem Satze folgt, dass, wenn man aus einer arithmetischen Reihe beliebig viele Glieder in gleichen Inter-

vallen herauswirft, die übrigen Glieder dennoch eine arithmetische Reihe von demselben Range bilden.

Denn denkt man sich eine arithmetische Reihe gebildet, indem man in ihrem allgemeinen Gliede x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$ &c. statt x setzt und nimmt aus der Reihe zwischen je zwei Gliedern eins weg, so kann man sich die restirende Reihe aus demselben allgemeinen Gliede entstanden denken, indem man statt x nach und nach x_0, $x_0 + 1.2h$, $x_0 + 2.2h \dots$ und wenn man in gleichen Intervallen zwei Glieder weglässt, x_0, $x_0 + 1.3h$, $x_0 + 2.3h \dots$ gesetzt hat &c.

Ist z. B. x^2 das allgemeine Glied, $x_0 = 3$ und $h = 1$, so hat man die Reihe:

$$\dots\underbrace{9}_{0},\ \underbrace{16}_{1},\ \underbrace{25}_{2},\ \underbrace{36}_{3},\ \underbrace{49}_{4},\ \underbrace{64}_{5},\ \underbrace{81}_{6},\ \underbrace{100}_{7},\ \underbrace{121}_{8},\ \underbrace{144}_{9}\dots$$

Lässt man vom 0ten Gliede an zwei Glieder ausfallen, so kommt die Reihe:

$$\begin{array}{cccc} 9, & 36, & 81, & 144\dots \\ & 27, & 45, & 63\dots \\ & & 18, & 18 = 1.2.3^2 \end{array}$$

47.

Aufgabe. Es sind so viele Glieder einer arithmetischen Reihe gegeben, dass der Rang derselben dadurch bestimmt werden kann; z. B.

$$\dots -13,\ 0,\ 1,\ 2,\ 15,\ 52,\ 125\dots$$

Man soll das allgemeine Glied derselben finden.

Auflösung. Die Reihe giebt drei Differenzreihen, nämlich:

$$\begin{array}{ccccccc} 13, & 1, & 1, & 13, & 37, & 73, & 121\dots \\ & -12, & 0, & 12, & 24, & 36, & 48\dots \\ & & 12, & 12, & 12, & 12, & 12\dots \end{array}$$

und da nun bestimmt ist, dass die fragliche Reihe eine arithmetische sein soll, so muss das allgemeine Glied derselben nothwendig eine ganze Function vom dritten Grade sein, deren allgemeine Form

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ldots\ldots (1)$$

Zufolge § 41 ist es gleichgültig, welches Glied in der Hauptreihe als das erste angenommen wird. Wir wollen deshalb das Glied 2 als erstes nehmen, mithin 1 als 0tes Glied. Dann müssen die in Gleichung (1) zu bestimmenden Coefficienten a, b, c, d offenbar so beschaffen sein, dass für $x = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ $y = 1, 2, 15, 52 \ldots\ldots$ wird. Dies gäbe dann zur Bestimmung von a, b, c, d vier Bedingungsgleichungen. Da aber jedes Glied der letzten Differenzreihe $= 12$, und, zufolge § 44, $1.2.3a = 12$ ist, so ist $a = \frac{12}{1.2.3} = 2$, und da ausserdem für $x = 0$, $y = 1$ sein muss, so ist (weil für $x = 0$ die drei ersten Glieder in (1) auch $= 0$ sind) $d = 1$, und wir brauchen also, um auch noch die Coefficienten b und c in dem schon näher bestimmten allgemeinen Gliede

$$y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$$

zu finden, nur zwei Bedingungsgleichungen aufzustellen. Nun muss für $x = 1$, $y = 2$, daher: $2 = 2 + b + c + 1$
und für $x = 2$, $y = 15$, daher $15 = 16 + 4b + 2c + 1$ sein.

Hieraus folgt: $b = 0$ und $c = -1$. (Algebra § 164.)

Mithin ist das gesuchte allgemeine Glied der vorgelegten Reihe:

$$y = 2x^3 - x + 1.$$

Soll nicht 2, sondern 1 das erste Glied sein, so ist das allgemeine Glied (§ 41)

$$y = 2(x-1)^3 - (x-1) + 1$$
$$\text{oder } y = 2x^3 - 6x^2 + 5x.$$

Aufgabe. Man sucht das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 13, $73\frac{5}{6}$, 243, $604\frac{1}{2}$ ....., in welcher $\frac{1}{3}$ das 0te, $\frac{1}{2}$ das erste Glied ist &c.

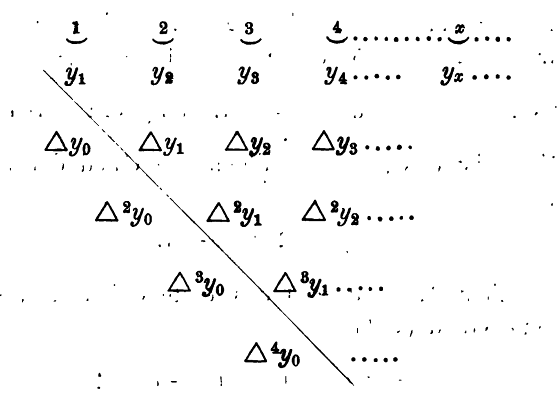
Antwort. Man findet $y = x^4 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{3}$.

Ebenso findet man $9x^2$ und $\frac{x^3}{1000}$ als die allgemeinen Glieder der arithmetischen Reihen: 9, 36, 81, 144.... und 0,001; 0,008; 0,027; 0,064; 0,125..., worin 9 und 0,001 die ersten Glieder sind.

48.

Aufgabe.*) Aus dem Anfangsgliede der Hauptreihe und jeder der sämmtlichen Differenzreihen das allgemeine Glied der Hauptreihe zu finden.

Auflösung. Um eine allgemeine Formel und eine bequeme Zeichensprache zu erhalten, wollen wir die den Zeigern $0, 1, 2 \ldots . x$ entsprechenden Glieder der Hauptreihe mit y_0, y_1, $y_2 \ldots . y_x$ bezeichnen, so dass $y_0, y_1, y_2 \ldots .$ das 0te, 1ste.... Glied bedeutet. Eben so soll $\triangle y_0$, $\triangle y_1 \ldots .$ das 0te, 1ste.... Glied der ersten Differenzreihe und $\triangle^2 y_0$, $\triangle^2 y_1 \ldots .$ das 0te, 1ste.... Glied der zweiten Differenzreihe bedeuten &c., so dass also



die Hauptreihe und ihre sämmtlichen Differenzreihen bedeuten.

*) Dieser und der folgende 49ste §, so wie auch § 50, 2, können so lange ungelesen bleiben, bis darauf zurückgewiesen wird.

Nach den schon oben aufgestellten Begriffen ist nun

$$\underbrace{}_{1}\qquad\qquad\underbrace{}_{2}\qquad\qquad\underbrace{}_{3}$$

$$\begin{array}{lll} y_1 - y_0 = \triangle y_0 & \triangle y_1 - \triangle y_0 = \triangle^2 y_0 & \triangle^2 y_1 - \triangle^2 y_0 = \triangle^3 y_0 \\ y_2 - y_1 = \triangle y_1 & \triangle y_2 - \triangle y_1 = \triangle^2 y_1 & \triangle^2 y_2 - \triangle^2 y_1 = \triangle^3 y_1 \\ y_3 - y_2 = \triangle y_2 & \triangle y_3 - \triangle y_2 = \triangle^2 y_2 & \triangle^2 y_3 - \triangle^2 y_2 = \triangle^3 y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Aus dem zweiten und dritten System vorstehender Gleichungen folgt:

$$\begin{array}{ll} \triangle y_1 = \triangle y_0 + \triangle^2 y_0 & \triangle^2 y_1 = \triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0 \\ \triangle y_2 = \triangle y_1 + \triangle^2 y_1 & \triangle^2 y_2 = \triangle^2 y_1 + \triangle^3 y_1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Das Zeichen $\triangle$ ist nun zwar ein blosses Symbol (keine Grösse), wenn man es aber in rein formeller Hinsicht als Factor betrachtet, so leuchtet ein, dass man letztere Gleichungen auch aus folgenden:

$$\begin{array}{ll} \triangle y_1 = \triangle (y_0 + \triangle y_0) & \triangle^2 y_1 = \triangle (\triangle y_0 + \triangle^2 y_0) \\ \triangle y_2 = \triangle (y_1 + \triangle y_1) & \triangle^2 y_2 = \triangle (\triangle y_1 + \triangle^2 y_1) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

entstanden denken kann. Denn wird das Zeichen $\triangle$ formell als Factor behandelt, so erhält man, nach Auflösung der Klammern, die vorhergehenden Formen richtig wieder. Dies festgehalten, folgt nun aus dem ersten System der Gleichungen nach und nach:

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0$$

$$y_2 = y_1 + \triangle y_1 = y_0 + \triangle y_0 + \triangle (y_0 + \triangle y_0)^{*)}$$

oder: $y_2 = y_0 + \triangle y_0 + \triangle y_0 + \triangle^2 y_0$

$$y_2 = y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0$$

ferner: $y_3 = y_2 + \triangle y_2 = y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0 + \triangle (y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0)^{*)}$

$$y_3 = y_0 + 3\triangle y_0 + 3\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$$

---

*) Es wurde nämlich für y_1 sein Werth aus der vorhergehenden Gleichung substituirt und für $\triangle y_1$ derselbe Werth mit dem vorgesetzten Zeichen $\triangle$ als Factor behandelt &c.

Man sieht nun leicht, dass man jedes folgende Glied, z. B. y_4, erhält, wenn man von der Entwickelung des nächst vorhergehenden das erste Glied abschreibt, dann nach und nach jedem Gliede das Zeichen $\triangle$ (als Factor behandelt) vorsetzt und zum folgenden addirt, wodurch dann in der Entwickelung irgend eines Gliedes, z. B. y_x, vermöge § 33 die Binomial-Coefficienten der $x$ten Potenz eines Binoms zum Vorschein kommen müssen. So ist z. B.

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0$$
$$y_2 = y_0 + 2\triangle y_0 + \triangle^2 y_0$$
$$y_3 = y_0 + 3\triangle y_0 + 3\triangle^2 y_0 + \triangle^3 y_0$$
$$y_4 = y_0 + 4\triangle y_0 + 6\triangle^2 y_0 + 4\triangle^3 y_0 + \triangle^4 y_0$$
$$y_x = y_0 + x\triangle y_0 + \frac{x.(x-1)}{1\,.\,2}\triangle^2 y_0 + \frac{x.(x-1).(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^3 y_0 + \ldots.$$

49.

Vorstehende allgemeine Formel kann vortheilhaft benutzt werden, um darnach das allgemeine Glied einer gegebenen arithmetischen Reihe, z. B. von

2, 15, 52, 125, 246......

zu finden, indem man zuerst die Anfangsglieder ihrer Differenzreihen sucht:

13,	37,	73,	121
	24,	36,	48
		12,	12

Hier hat man also $y_0 = 2$, $\triangle y_0 = 13$, $\triangle^2 y_0 = 24$, $\triangle^3 y_0 = 12$, $\triangle^4 y_0 = 0$. Daher ist

$$y_x = 2 + x\,.\,13 + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\,.\,24 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,12$$

$$y = 2 + 5x + 6x^2 + 2x^3.$$

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2, 3 \ldots.$, so kommt die obige Reihe.

Soll nicht, wie nach der allgemeinen Formel hier ange-

nommen werden musste, 2 das 0te, sondern das 1ste Glied sein, so setze man in dem gefundenen allgemeinen Gliede nur $x-1$ statt x, so ist:

$$y = 1 - x + 2x^3.$$

50.

Aufgabe. Es ist eine arithmetische Reihe, z. B. diese:

2, 15, 52, 125, 246....

gegeben, man sucht eine allgemeine Formel, nach welcher man die Summe beliebig vieler Glieder bestimmen kann.

Auflösung. Betrachtet man hier 2 als das erste Glied und denkt man sich, wie nachstehend angedeutet, die Summe von einem (ersten) Gliede über das erste, die Summe der beiden ersten Glieder über das zweite, die Summe der drei ersten Glieder über das dritte gesetzt &c.

Summenreihe....	2,	17,	69,	194,	440....
	1	2	3	4	5
Hauptreihe......	2,	15,	52,	125,	246....

so erhält man eine Reihe von Zahlen (die sogenannte Summenreihe), welche offenbar wieder eine arithmetische ist, und zwar von einem Range höher, als die, deren Summe gesucht wird. Denn subtrahirt man die auf einander folgenden Glieder der Summenreihe 2, 17, 69...., so muss offenbar als erste Differenzreihe die gegebene Reihe 2, 15, 52.... wieder erscheinen, und es ist ein beliebiges $x$tes Glied der Summenreihe = der Summe von x Gliedern der Hauptreihe. Man braucht also nur das allgemeine Glied der Summenreihe zu suchen. Dies kann nach § 47 durch die Methode der unbestimmten Coefficienten oder auch nach der allgemeinen Formel § 48 geschehen.

1) Nach der ersten Methode schliessen wir so: Da die gegebene Reihe, 2, 15, 52.... vom 3ten, also die Summenreihe 2, 17, 69.... vom 4ten Range ist, so muss ihr allgemeines oder das sogenannte summatorische Glied in folgender Form enthalten sein:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Soll nun 2 das 1ste Glied bedeuten, so müssen die Coefficienten a, b, c, d, e so beschaffen sein, dass, wenn wir in vorstehender Form $x=1, 2, 3 \ldots$ setzen, $y=2, 17, 69 \ldots$ wird. Hieraus könnten wir zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d, e fünf Bedingungs-Gleichungen bilden. Wir haben jedoch an drei genug, indem wir a und e kennen. Weil nämlich jedes der gleichen Glieder der letzten Differenzreihe $= 12$ ist, und $1.2.3.4a=12$, so ist $a=\frac{1}{2}$, und weil von der Summenreihe die 1ste Differenzreihe 2, 15, 52 .... sein soll, so muss nothwendig das 0te Glied der Summenreihe $= 0$ sein. Es muss also auch, weil das allgemeine Glied für $x=0$, $y=0$ geben soll, nothwendig $e=0$ sein. Das gesuchte allgemeine Glied ist also näher bestimmt

$$y=\tfrac{1}{2}x^4+bx^3+cx^2+dx.$$

Da nun, wenn wir $x=1, 2, 3$ setzen, $y=2, 17, 69$ sein muss, so ist

$$2=\tfrac{1}{2}+b+c+d$$
$$17=\tfrac{16}{2}+8b+4c+2d$$
$$69=\tfrac{81}{2}+27b+9c+3d$$

hieraus: $b=1$, $c=0$, $d=\frac{1}{2}$, mithin ist

$$y=\tfrac{1}{2}x^4+x^3+\tfrac{1}{2}x.$$

Setzt man hierin $x=1, 2 \ldots 1000$ &c., so hat man die Summe von ein, zwei ... tausend Gliedern der Reihe 2, 15, 52 ....

2) Will man von der Summenreihe

$$\underset{0}{0}, \quad \underset{1}{2}, \quad \underset{2}{17}, \quad \underset{3}{69} \ldots$$

das allgemeine Glied nach der Formel

$$y=y_0+x.\Delta y_0+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 y_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0+\ldots$$

bestimmen (§ 48), so ist hier $y_0=0$, $\Delta y_0=2$, $\Delta^2 y_0=13$, $\Delta^3 y_0=24$, $\Delta^4 y_0=12$, $\Delta^5 y_0=0$, mithin

$$y=0+x.2+\frac{x(x-1)}{1.2}.13+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.24+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}.12,$$

$$y=\frac{x^4}{2}+x^3+\frac{x}{2}.$$

51.

Um anzudeuten, dass die Reihe, welche aus einer Function von x entspringt, indem man darin $x = 1, 2, 3 \ldots.$ setzt, summirt werden soll, setzt man vor die Function das Zeichen Σ. So ist (siehe das Beispiel in § 50)

$$\Sigma(2x^3 - x + 1) = \tfrac{1}{2}x^4 + x^3 + \tfrac{1}{2}x = \frac{x}{2}(x^3 + 2x^2 + 1)$$

In gleicher Weise erhält man

$$\Sigma(x) = 1 + 2 + 3 + \ldots. + x = \frac{x.(x+1)}{1\,.\,2}$$

$$\Sigma(x^2) = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + x^2 = \frac{x.(x+1)(2x+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\Sigma(x^3) = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + x^3 = \left\{\frac{x.(x+1)}{1\,.\,2}\right\}^2$$

$$\Sigma(x^4) = 1 + 2^4 + 3^4 + \ldots. + x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$$

Von den drei letzten Formeln wird in einigen Lehrbüchern der Mechanik Anwendung gemacht. Eine allgemeine Formel für $\Sigma(x^n)$ abzuleiten, halten wir nicht für praktisch wichtig.

Viertes Buch.

Von den figurirten Zahlen.

52.

Bildet man aus der Reihe der aufeinander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3,....n die Summenreihe, nämlich:

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15 \ldots \frac{n.(n+1)}{1\,.\,2}$$

```
  o      o       o        o
        o o     o o      o o    .........
               o o o    o o o
                       o o o o
```

so entstehen die sogenannten dreieckigen Zahlen, weil, wenn man sich Kugeln von gleichem Durchmesser denkt, die Anzahl, welche jedes Glied der Reihe darstellt, sich in einer Ebene so an einander legen lassen, dass immer ein gleichseitiges Dreieck entsteht. Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus der Reihe 1, 2, 3... An n Kugeln kann man $n-1$ legen, an diese wieder $n-2$ &c.

Aus demselben Grunde nennt man die Quadratzahlen auch wohl viereckige Zahlen.*)

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16 \ldots\ldots\ldots n^2$$

```
                 o o o
  o      o o     o o o .........
         o o     o o o
```

Beiderlei vieleckige Zahlen sind offenbar arithmetische Reihen zweiten Ranges.

---

*) Es giebt übrigens noch viele andere Zahlenreihen, welche, jedoch unpassend, figurirte Zahlen (Polygonalzahlen) heissen, aber keinen praktischen Nutzen haben.

53.

Bildet man aus den Reihen der dreieckigen und viereckigen Zahlen die Summenreihen, welche also vom dritten Range sein müssen und deren allgemeine Glieder, nach § 50, leicht zu finden sind, so erhält man die sogenannten dreieckigen und viereckigen Pyramidalzahlen, nämlich:

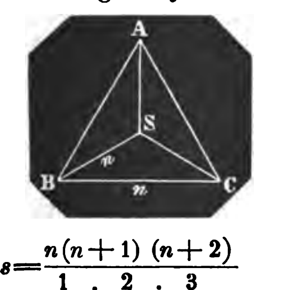
$$1, \quad 4, \quad 10, \quad 20, \quad 35 \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$1, \quad 5, \quad 14, \quad 30, \quad 55 \ldots \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

Der Name rührt daher, weil sich aus Kugeln von gleichem Caliber wirklich regelmässige Pyramiden bilden lassen. In der Reihe der dreieckigen Zahlen z. B. findet die erste Kugel Platz und kommt fest zu liegen auf den folgenden drei. Die hierdurch erhaltene dreieckige Pyramide von vier Kugeln kann man auf die folgende Schicht von sechs Kugeln gesetzt denken &c. Ebenso lassen sich offenbar die Kugeln, welche die viereckigen Zahlen darstellen, zu einer viereckigen Pyramide aufschichten, wie es auch in den Zeughäusern wirklich geschieht.

54.

Es ist also leicht, die Anzahl Kugeln in einer dreieckigen und viereckigen Pyramide zu berechnen.



$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

So viele Kugeln nämlich in der untersten Reihe BC liegen, eben so viele liegen auch in der schräg aufsteigenden Reihe BS und eben so viele Schichten liegen folglich auf einander. Liegen also in der untersten Reihe n Kugeln, so hat man nur die Summe von n Gliedern der dreieckigen und viereckigen Zahlen zu nehmen. Diese ist, wie schon angegeben, für die dreieckige Pyramide $=\frac{n(n+1)\,(n+2)}{1\;.\;2\;.\;3}$, und für die viereckige $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\;.\;2\;.\;3}$.

Sind die Pyramiden nicht voll, jedoch parallel zur untersten Schicht abgekürzt, und liegen in der untersten Reihe n, in der obersten Reihe m Kugeln, so ist die Zahl der Kugeln in der abgekürzten dreis. Pyramide $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\;.\;2\;.\;3}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\;.\;2\;.\;3}$ und in der abgekürzten viers. Pyramide $=\frac{n(n+1)(n+1)}{1\;.\;2\;.\;3}-\frac{m.(m+1)(2m+1)}{1\;.\;2\;.\;3}$.

Lägen z. B. in der untersten Reihe der vollen dreieckigen Pyramide 20 Kugeln, so ist die Zahl aller $=\frac{20\;.\;21\;.\;22}{1\;.\;2\;.\;3}=1540$.

55.

Ausser in dreieckigen und viereckigen Pyramiden, werden die Kugeln auch in länglichen Haufen aufgerichtet, und es ist auch hier leicht, die Anzahl derselben zu berechnen. Liegen nämlich in der obersten Reihe (Rücken) m Kugeln, so liegt diese offenbar auf einer Schicht von zwei Reihen von je $m+1$ Kugeln; diese Schicht enthält also $2(m+1)$ Kugeln und liegt wieder auf einer Schicht von drei Reihen von je $m+2$ Kugeln. Diese dritte Schicht enthält also $3\,(m+2)$ Kugeln &c. Liegen also in einer Seite eines Seitendreiecks (welches offenbar gleichseitig ist) n Kugeln, so besteht der ganze Haufen aus n Schichten und die unterste Schicht enthält n Reihen von je $m+n-1$ Kugeln.



$$s=\frac{n(n+1)\,(3m+2n-2)}{1\;.\;2\;.\;3}$$

Die aufeinander folgenden Schichten des ganzen Haufens sind also:

$$\underbrace{m}_{1},\quad \underbrace{2m+2}_{2},\quad \underbrace{3m+6}_{3},\quad \underbrace{4m+12}_{4},\quad \underbrace{5m+20}_{5},\ldots \underbrace{n(m+n-1)}_{n}.$$

Diese Reihe ist offenbar eine arithmetische vom 2ten Range, das summatorische Glied also vom 3ten Range. Mithin: $s = an^3 + bn^2 + cn + d$. Weil aber $1.2.3.a = 2$ und zufolge des § 50 erwähnten Grundes für $n = 0$ auch $s = 0$ sein muss, so ist $a = \frac{1}{3}$ und $d = 0$, folglich näher bestimmt:

$$s = \frac{n^3}{3} + bn^2 + cn.$$

Die noch zu bestimmenden Coefficienten b, c müssen nun so beschaffen sein, dass für $n = 1$, $s = m$ und für $n = 2$, $s = 3m + 2$ wird. Dies giebt uns die beiden Bedingungsgleichungen:

$$m = \tfrac{1}{3} + b + c$$
$$3m + 2 = \tfrac{8}{3} + 4b + 2c$$
$$\text{woraus: } b = \tfrac{1}{2}m \text{ und } c = \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{3}.$$

Es ist mithin:

$$s = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}mn^2 + \tfrac{1}{2}mn - \tfrac{1}{3}n$$

$$\text{oder: } s = \frac{n}{6}\left[2(n+1)(n-1) + 3m(n+1)\right]$$

$$s = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

Anmerkung. V e g a giebt für diese Formel folgende leichte Gedächtnissregel: Man addire zu dem Rücken des Haufens beide mit ihm gleichlaufenden Grundlinien und multiplicire den dritten Theil der Summe mit der Anzahl Kugeln eines Seitendreiecks, welche Anzahl immer $= \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}$ ist. Diese Gedächtnissregel passt (wie schon V e g a bemerkt) auch für die dreieckige und viereckige Pyramide, wo dann aber bei der viereckigen Pyramide der Rücken nur e i n e, und bei der dreieckigen sowohl der Rücken, als auch die eine Grundlinie, jede nur eine Kugel hat.

Fünftes Buch.

Convergenz unendlicher Reihen.

56.

Einen Grössenausdruck, welcher nach ganzen und positiven Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitet, wie $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots.$ nennt man die Grundform der Analysis, und es ist eine der wichtigsten Aufgaben dieser Wissenschaft, alle Functionen einer veränderlichen Grösse, welche diese Form nicht haben, wie z. B. a^x, $\sin x$, $\cos x$ &c., in dieselbe umzuschmelzen, weil man aus dieser einfachern Grundform das Wesen und die Eigenschaften der Functionen oftmals deutlicher erkennen, so wie auch den Werth der Function für ein bestimmtes x darnach leichter berechnen kann.

Man kann die Grundform der Analysis, in welcher die beständigen Coefficienten $a, b, c\ldots.$ beliebige ganze, gebrochene, positive oder negative endliche Zahlen, Null nicht ausgenommen, sein können, gleichnissweise ein allgemeines Zahlensystem nennen, indem in der That jedes besondere darin enthalten ist, z. B. das dekadische, für welches $x=10$ ist, und die Coefficienten $a, b, c\ldots.$ einen der Werthe 0, 1, 2, 3 bis 9 haben. So ist z. B.:

$$57034=4+3.10+0.10^2+7.10^3+5.10^4.$$

Ferner nennt man die Grundform der Analysis eine Form 1sten, 2ten....$n$ten Grades, je nachdem der höchste Exponent der veränderlichen Grösse 1, 2, 3....n ist. $a+bx$ oder bx^2 ist eine Form 1sten Grades, $a+bx+cx^2$; $a+bx^2$ sind Formen zweiten Grades &c.

57.

Dass sich eine Function, welche die Grundform der Analysis nicht hat, auf dieselbe bringen lässt, davon bietet schon die Newton'sche Formel ein vorläufiges Beispiel. So ist z. E.:

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Auf den glücklichen Gedanken aber, alle Functionen auf die Grundform der Analysis zu bringen, mögen wohl zuerst die gebrochenen Functionen geführt haben,*) die man stets als angedeutete Divisionen betrachten und durch wirkliche Division in solche Reihen verwandeln kann, welche diese Grundform haben.

Nehmen wir als Erläuterungs-Beispiel die einfache gebrochene Function $\frac{1}{1-x}$ und dividiren, wie es in der Algebra § 321 gelehrt worden, den Zähler (1) durch den Nenner $(1-x)$, so ist der Quotient 1, und nachdem man hiermit den Divisor multiplicirt und das Product vom Dividend (1) subtrahirt, bleibt x als Rest. Dividirt man abermals diesen Rest &c., so kommt nach und nach:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

Es ist klar, dass die Ausdrücke rechter Hand, wenn man sie einrichtet, alle auf die ursprüngliche Form $\frac{1}{1-x}$ zurückführen, und dass folglich die Zulässigkeit dieser Art Division dadurch

*) Nicol. Kauffmann, auch Mercator genannt, ein Holsteiner, soll zuerst auf die Idee der unendlichen Reihen gekommen sein, in welche er die gebrochenen Functionen verwandelte, um sie leichter integriren zu können.

gerechtfertigt ist, und dass man auf beiden Seiten gleiche Werthe erhalten muss, was für eine bestimmte Zahl man auch statt der veränderlichen Grösse x annehmen mag.

58.

Bei solchen Umformungen der Functionen kommt man aber in der Regel auf solche gesetzmässig fortschreitende Reihen, die kein Ende nehmen und deshalb unendliche (transcendente) Reihen genannt werden. (Vergl. die Anmerkung in § 34). Es fragt sich deshalb, ob in materieller Hinsicht, d. h. wenn man für die veränderliche Grösse einen bestimmten Werth setzt, der Betrag (Summe) der unendlichen Reihe oder vielleicht auch schon ein Stück davon dem wirklichen Betrage der Function, wenn auch nicht vollkommen, so doch näherungsweise und für die Praxis genügend gleich ist, oder nicht.*) Dies hängt von einem wohl zu beachtenden Umstande ab, nämlich: ob die unendliche Reihe convergent oder divergent ist.

59.

Eine gesetzmässige unendliche Reihe, d. h. eine solche, deren Glieder nach einem bestimmten Gesetz (allgemeines Glied) entspringen, heisst convergent, wenn, wie viel Glieder vom Anfang an man auch summiren wollte, die Summe derselben eine gewisse bestimmte Grenze s (endliche Zahl!) nie überschreiten, sich ihr jedoch immer mehr und mehr nähern kann. Nehmen wir z. B. die gesetzmässige Reihe:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots. + \frac{1}{2n} + \ldots. \text{ in infinitum,}$$

deren allgemeines Glied $\frac{1}{2n}$, so wissen wir schon aus der

*) Unendliche Reihen kommen schon in der Arithmetik vor, z. B.: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots.$, jedoch kennt man hier das Gesetz nicht, nach welchem die Ziffern der Wurzel aufeinander folgen.

Algebra § 329, dass die Summe immer grösser wird, je mehr Glieder man zusammenfasst, dass trotzdem aber die Summe die Zahl 1 nie überschreiten kann. Die fragliche unendliche Reihe ist mithin convergent und ihre Summe = 1.

Divergent ist hingegen eine unendliche Reihe, wenn ihre Summe entweder $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

60.

Damit eine unendliche Reihe convergent sei, ist offenbar nothwendig, dass ihre Glieder, bis zum Verschwinden, immer kleiner und kleiner werden. Aber dies Merkmal allein genügt noch nicht. Denn betrachten wir einmal die Reihe:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}|+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}|+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}|+\ldots+\tfrac{1}{24}|+\ldots+\frac{1}{\infty}$$

deren Glieder bis zum Verschwinden abnehmen. Denken wir uns diese Reihe, wie angedeutet (von den beiden ersten Gliedern an, in Gruppen von 3, 6, 12, 24, 48 &c. Glieder getheilt, so ist klar, dass, wenn jedes Glied in einer Gruppe auch nur den Werth des letzten darin hätte, dennoch die Summe einer jeden Gruppe = ½ sein würde. Das nun die Zahl der Gruppen unendlich ist, so ist auch die Summe der ganzen Reihe (weil $\infty . \tfrac{1}{2} = \infty$) unendlich gross, und also die Reihe nicht convergent, sondern divergent (s. § 59).

61.

Ein leichtes Kennzeichen, woran man in den meisten Fällen die Convergenz einer gesetzmässigen unendlichen Reihe erkennen kann, giebt uns die einfache geometrische Progression:

$$a+ax+ax^2+ax^3+\ldots+ax^{n-1}$$

Denn bezeichnen wir die Summe von n Gliedern mit s, so ist bekanntlich (Algebra § 266):

$$s=\frac{ax^n-a}{x-1}$$

oder: $s = \frac{a - ax^n}{1 - x}$

Ist nun der Exponent $x = 1$, so ist für $n = \infty$ die Summe der unendlichen Progression $a + ax + ax^2 + \ldots + \ldots ax^{n-1} = \infty \, . a$, also unendlich (Algebra § 328), mithin die unendliche Reihe

$$a + ax + ax^2 + \ldots + \ldots + ax^{n-1} + \ldots$$

für $x = 1$ divergent, und dies ist sie offenbar um so mehr, wenn $x > 1$. Ist aber der Exponent ein echter Bruch, also $x < 1$, so wird für $n = \infty$ in obiger Gleichung, die man auch so schreiben kann:

$$s = \frac{a}{1 - x} - \frac{ax^n}{1 - x}$$

der Factor $x^\infty = 0$*) und Summe der unendlichen Progression $= \frac{a}{1 - x}$. Eine unendliche geometrische Progression, deren Exponent ein echter Bruch ist, ist folglich immer convergent. Um also zu erkennen, ob eine gesetzmässig fortschreitende unendliche Reihe convergent ist, dividire man nur mit einem Gliede in das nächstfolgende; ist dann der Quotient ein echter Bruch und bleibt für die ganze Reihe immer derselbe, so ist diese Reihe offenbar eine geometrische Progression und, wie eben bewiesen, convergent, und dies um so mehr, wenn der fragliche Quotient immer kleiner wird. Wird aber der Quotient immer grösser und zuletzt > 1, so ist die Reihe divergent.**)

---

*) Sei z. B. $x = \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$, so ist $(\frac{4}{5})^\infty = \frac{1}{(1 + \frac{1}{4})^\infty} = \frac{1}{1 + \infty \, . \, \frac{1}{4} + \ldots} = \frac{1}{\infty} = 0$.

**) Die Untersuchungen über Convergenz oder Divergenz solcher unendlichen Reihen, bei welchen der erwähnte Quotient immer grösser und zuletzt $= 1$ wird, führen auf sehr grosse Weitläufigkeiten. Da aber alle solche Reihen nur rein wissenschaftliches und kein praktisches Interesse haben, indem sie in den Fällen, wo sie convergent sind, doch immer so schlecht convergiren, dass man mehrere tausend, ja mehrere Millionen Glieder addiren müsste, um die Summe nur bis auf zehn Decimalen genau

Zusatz. Wenn also in einer unendlichen Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 +$ &c., welche nach ganzen positiven Potenzen der veränderlichen Grösse x fortschreitet, — und mit solchen Reihen haben wir es in der Folge nur zu thun — die Coefficienten a_0, a_1, $a_2 \ldots$ endliche Zahlen sind, so ist die Reihe für jeden Werth von $x < 1$ immer convergent. Denn bezeichnen wir den grössten Coefficienten mit a und legen allen Coefficienten diesen Werth bei, so ist, wie eben gezeigt, die unendliche geometrische Progression $a + ax + ax^2 +$ &c., für $x < 1$ convergent, um so mehr also die fragliche Reihe.

62.

In § 57 erhielten wir durch fortgesetzte Division

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Setzen wir für die veränderliche Grösse x einen beliebigen echten Bruch, so ist für $n = \infty$, das sogenannte Restglied $\frac{x^n}{1-x} = 0$. Die dadurch hervorgerufene unendliche Reihe hat also für $x < 1$ (weil dann convergent) wirklich Sinn, d. h. wir können das Restglied weglassen, die unendliche Reihe statt ihrer Quelle $\frac{1}{1-x}$ und umgekehrt setzen, weil für $x < 1$ die Function $\frac{1}{1-x}$ wirklich die Summe der unendlichen Reihe ist. Setzt man z. B. $x = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ &c., so hat man:

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \text{ in infinitum}$$
$$3 = 1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{8}{27} + \ldots \text{ in infinitum.}$$

63.

Jede unendliche Reihe mit regelmässig abwechselnden

zu erhalten, so können wir alle diese Reihen ganz unbeachtet lassen. Von praktisch brauchbaren unendlichen Reihen verlangt man immer eine so starke Convergenz, dass in der Regel schon die Zusammenfassung der zwei, drei oder vier ersten Glieder genügt. (§ 170.)

Vorzeichen, und deren Glieder bis zum Verschwinden abnehmen, ist immer convergent, so z. B die Reihe:

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-+\ldots\pm\frac{1}{2n-1}.$$

Denn hier ist zuvor klar, dass ihre Summe positiv sein muss, weil die Reihe sich so schreiben lässt: $(1-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7})+\ldots\ldots$ d. i. $2\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}\right\}$. Ferner ist klar, dass die Summe kleiner, als das erste Glied ist, weil immer mehr subtrahirt, als wieder zugelegt wird, oder weil die als positiv erkannte Reihe sich auch so schreiben lässt: $1-(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{9})\ldots$ Diese Reihe ist mithin convergent.

64.

Wenn zwei nach ganzen Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitende endliche, oder auch convergente unendliche Reihen: $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ und $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots$ für jeden Werth von x gleiche Resultate geben sollen, so müssen nothwendig die Coefficienten von gleich hohen Potenzen der veränderlichen Grösse einander gleich sein. In Zeichen: wenn für jeden Werth von x

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots\ldots(1)$$

sein soll, so muss nothwendig sein:

$$a=\alpha;\ b=\beta;\ c=\gamma;\ d=\delta\ \&c.$$

Dieser Satz, der in der That an sich so einfach und evident ist, dass man ihn wohl nicht mit Unrecht einen Grundsatz nennt, lässt sich doch folgendermaassen beweisen.

Da nämlich die Gleichung (1) für jeden Werth von x bestehen soll, so setze man $x=0$, alsdann werden alle mit x multiplicirten Glieder $=0$ und es bleibt dann: $a=\alpha$.

Gleichung (1) geht damit über in

$$a+bx+cx^2+\ldots=a+\beta x+\gamma x^2\ldots,\ \text{d. i.}$$

$$bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

oder, indem man durch x dividirt, wo aber, um den vieldeutigen Ausdruck $\frac{0}{0}$ zu vermeiden, x nicht $= 0$ sein darf:

$$b + cx + dx^2 + \ldots = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \ldots$$

Setzt man in dieser Gleichung wieder $x = 0$, so folgt: $b = \beta$. Auf dieselbe Weise ergiebt sich $c = \gamma$, $d = \delta$ &c.

Anmerkung. Aus der Gleichung (1) folgt noch:

$$(a - \alpha) + (b - \beta)x + (c - \gamma)x^2 + \ldots = 0.$$

Wenn also eine nach ganzen positiven Potenzen einer veränderlichen Grösse x fortschreitende Reihe für jeden Werth von $x = 0$ sein soll, in Zeichen:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

so muss nothwendig jeder Coefficient A, B, C.... $= 0$ sein. Dieser Satz ist im Grunde derselbe wie der vorhergehende, und kann auch eben so bewiesen werden. Denn setzt man in (2) $x = 0$, so folgt $A = 0$ und es bleibt:

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0$$

oder durch x dividirt:

$$B + Cx + Dx^2 + \ldots = 0.$$

Setzt man jetzt wieder $x = 0$, so ist auch $B = 0$ &c. $C = 0$, $D = 0$...

Zusatz. Es folgt hieraus, dass eine stetige Function einer veränderlichen Grösse, x, jedenfalls nur auf Eine Art in eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden kann. Denn angenommen, man habe $\varphi(x)$ nach zwei durchaus verschiedenen Methoden entwickelt, und es seien:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots.$$

die beiden Reihen und deren beiderseitige Summen, so lange sie convergiren, einander gleich, so muss nach dem Vorhergehenden nothwendig $a=\alpha$, $b=\beta$ &c. sein.

Nach dieser Vorbereitung können wir nun zu der Verwandlung der Functionen in Reihen schreiten. Man merke sich aber, dass, wenn die Reihen, wie fast immer der Fall ist, unendlich (transcendent — s. § 34) werden, dieselben dann, wenn sie Sinn haben und ihrer Quelle gleich geachtet werden sollen, nothwendig convergent sein müssen.

Sechstes Buch.

Verwandlung der Functionen in Reihen.

Recurrirende Reihen.

65.

Hat man eine gebrochene Function, deren Zähler und Nenner nach ganzen steigenden Potenzen derselben veränderlichen Grösse x geordnet sind, z. B. $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}$ und wo das erste Glied im Nenner constant ist (kein x enthält), so kann man eine solche Function, wie schon § 57 angedeutet, durch fortgesetzte Division in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln. So giebt z. B. $\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$

$$
\begin{array}{l}
2+5x \quad : 1+2x-3x^2 = 2+x+4x^2-5x^3+\ldots \\
\underline{2+4x-6x^2} \\
\quad x+6x^2 \\
\quad \underline{x+2x^2-3x^3} \\
\qquad 4x^2+3x^3 \\
\qquad \underline{4x^2+8x^3-12x^4} \\
\qquad\quad -5x^3+12x^4
\end{array}
$$

Es ist mithin:

$$\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}=2+x+4x^2-5x^3+\ldots$$

Auf diese Weise, nämlich durch gewöhnliches Dividiren, erhält man die Reihe (Quotient) am leichtesten, aber es tritt so das Gesetz derselben nicht hervor, nach welchem man sie beliebig weit fortsetzen kann. Um dieses zur vollständigen Kenntniss der Reihen nothwendige Gesetz zu erhalten, wendet man die zuerst von Cartesius angegebene, sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten an, welche man wegen ihrer grossen Fruchtbarkeit und schöpferischen Kraft nicht mit Unrecht den Geist der Analysis genannt hat.

66.

Da wir nämlich im Voraus überzeugt sind, dass der Quotient aus $\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}$ (wenn man, wie angegeben, mit dem Nenner in den Zähler dividirt) nothwendig eine Reihe geben muss, welche nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitet, so kann man sie vorläufig fingiren. Wir setzen nämlich

$$\frac{2+5x}{1+2x-3x^2}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$

Um die noch unbestimmten (unbekannten) Coefficienten A_0, A_1, $A_2\ldots$ zu bestimmen,*) multiplicire man auf beiden Seiten mit dem Nenner der gebrochenen Function, so kommt

$$2+5x=(1+2x-3x^2)(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots)$$

oder die nur angedeutete Multiplication wirklich ausgeführt,

$$2+5x=\left\{\begin{array}{l|l|l|l|l} A_0+A_1 & x+\ A_2 & x^2+\ A_3 & x^3+\ A_4 & x^4+\ldots \\ \quad\ +2A_0 & \ +2A_1 & \ +2A_2 & \ +2A_3 & \ +\ldots \\ & \ -3A_0 & \ -3A_1 & \ -3A_2 & \ +\ldots \end{array}\right.$$

*) Weil für jeden Werth von x der vorgegebene Bruch die Summe der ganzen Reihe sein soll, so kann man den ersten Coefficienten A_0 auch dadurch bestimmen, indem man beiderseits $x=0$ setzt, alsdann werden alle in x multiplicirten Glieder $=0$ und es bleibt $\frac{2}{1}=A_0$.

Nehmen wir nun vorläufig an, die in's Unendliche fortlaufende Reihe rechter Hand sei convergent (um das Restglied weglassen zu können), so haben wir darauf zu bestehen, dass für jeden Werth von x die rechte Seite dasselbe Resultat giebt, wie die linke. Dann müssen aber beiderseits die Coëfficienten von gleich hohen Potenzen von x gleich sein (§ 64). Mithin ist (weil man statt $2+5x$: $2+5x+0.x^2+0.x^3+\ldots$ setzen kann):

$$\begin{aligned} &A_0 = 2 \\ &A_1 + 2A_0 = 5 \\ &A_2 + 2A_1 - 3A_0 = 0 \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

oder so geschrieben:

$$\begin{aligned} &A_0 = 2 \\ &A_1 = 5 - 2A_0 = 5 - 4 = 1 \\ &A_2 = -2A_1 + 3A_0 = -2 + 6 = 4 \\ &A_3 = -2A_2 + 3A_1 = -8 + 3 = -5 \\ &A_4 = -2A_3 + 3A_2 = 10 + 12 = 22. \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass, nachdem die beiden ersten Coëfficienten A_0, A_1 gefunden sind, man die folgenden alle nach einer und derselben Regel ($A_n = -2A_{n-1} + 3A_{n-2}$) erhält indem man nämlich den nächstvorhergehenden mit -2 und den vorvorhergehenden mit $+3$ multiplicirt. Dies ist auch der Grund, weshalb man alle durch Division entstehenden Reihen recurrirende (zurücklaufende) nennt, obgleich es eigentlich nicht die Reihe, sondern der Rechner ist, welcher recurrirt. Es erhellet wohl leicht, dass die Recursionsregel mit der Anzahl der Glieder im Nenner der gebrochenen Function wächst.

67.

Die Hauptfragen nun, welche bei einer recurrirenden Reihe gestellt werden können, sind folgende drei:

1) Aus dem erzeugenden Bruch der recurrirenden Reihe das allgemeine Glied derselben zu finden, nach welchem man jedes beliebige Glied derselben direct berechnen kann, d. h. ohne die vorhergehenden erst zu suchen.

2) Die Summe von beliebig vielen Gliedern zu bestimmen.

3) Zu finden, ob eine vorliegende unendliche Reihe eine recurrirende ist, und wenn sie als solche erkannt, daraus den erzeugenden Bruch zu finden.

Mit den recurrirenden Reihen haben sich besonders Bernouilli und Moivre viel beschäftigt.

Ob eine recurrirende Reihe convergent ist, entscheidet man nach der § 61 gegebenen Regel. Da dies aber sehr selten der Fall ist, so haben die recurrirenden Reihen fast nur ein rein wissenschaftliches Interesse, weshalb wir auch nicht bei ihnen verweilen dürfen.

Die folgenden fünf Reihen aber sind von der grössten Wichtigkeit, theils schon an sich selbst, theils wegen der wichtigen Forderungen und Hülfsmittel, die man daraus zieht, und weil auf sie die ganze Differentialrechnung gegründet werden kann.

Anmerkung 1. Bei der Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen nach der vorhin gezeigten Methode der unbestimmten Coefficienten wird die unendliche Reihe immer erst fingirt, und der Verlauf der Rechnung muss dann zeigen, ob eine solche Reihe, welche die Grundform der Analysis hat, möglich ist. Werden dann die vorläufig fingirten Coefficienten dadurch bestimmt, dass man, wie in § 66, zwei Grundformen mit einander vergleicht und die Coefficienten von gleich hohen Potenzen derselben veränderlichen Grösse gleich setzt, so ist, wenn die unendliche Reihe sich als convergent ergiebt, alles klar und bündig. Bestimmt man aber die zu findende Reihe aus gewissen Eigenschaften der Function, so muss man sehr vorsichtig und jedenfalls überzeugt sein, dass die fraglichen Eigenschaften der Function eigenthümlich sind.

Anmerkuug 2. Es kann eine Function einer veränderlichen Grösse, x, vieldeutig, d. h. so beschaffen sein, dass sie für einen bestimmten Werth von x verschiedene Werthe annimmt. So ist z. B. (Algebra § 326, b) für $x=15$ die Function $(1+x)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2,=-2,=2.\sqrt{-1},=-2.\sqrt{-1}$. Eben so (Trigonometrie § 62, a, Note) für $x=\frac{1}{2}$ die Function

arc. sin $x =$ arc. sin $\frac{1}{2} = 30^0, = 150^0, = 390^0$ &c. Wenn also eine solche Function sich überhaupt in eine convergente Reihe von der Form $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 +$ &c. verwandeln lässt, so kann von einer solchen Reihe jene Vieldeutigkeit nicht verlangt werden. Denn da die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots,$ constant sind, so kann die unendliche Reihe für einen solchen Werth von x, für welchen sie convergent ist, doch nur Eine Summe (nicht verschiedene) haben, und deshalb auch nur für denjenigen Werth der Function gelten, welcher mit dieser Summe übereinstimmt.

Binomischer Lehrsatz für jeden Exponenten.

68.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Function $(1 + x)^p$ auch für **d e n** Fall in eine Reihe zu verwandeln, wo der Exponent keine ganze positive Zahl ist. Wir nehmen das Binom in der einfachen Form $1 + x$, da $(a + b)^p = a^p\left(1 + \frac{a}{b}\right)^p$.

Es sei nun zuerst p ein positiver echter oder unechter Bruch, den wir mit $\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen. Alsdann ist, weil m eine ganze Zahl und $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}x^2 + \ldots + x^m$ ist (§ 29):

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m} = \sqrt[n]{\left(1 + mx + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}x^2 + \ldots + x^m\right)}$$

Nehmen wir nun an, die hier geforderte $n$te Wurzel aus $1 + mx + \ldots + x^m$ lasse sich durch eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende convergente Reihe *) ausdrücken, es sei nämlich:

$$\sqrt[n]{\left(1 + mx + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}x^2 + \ldots + x^m\right)} = 1 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x^3 + \ldots\ldots$$

---

*) Dass jedenfalls nur eine solche nach **g a n z e n** positiven, und nicht nach negativen oder gebrochenen Exponenten fortschreitende Reihe möglich sein kann, folgt schon aus den Regeln der Variation (§ 19, 2), oder der gemeinen Multiplication, indem die fingirte Reihe $1 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}x^2 \ldots,$ auf die $n$te Potenz erhoben, mit $1 + mx + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}x^2 + \ldots$ übereinstimmen muss.

so kommt es zunächst nur darauf an, den ersten Coefficienten A zu bestimmen (weil sich die folgenden daraus ergeben). Dass das erste Glied rechter Hand nothwendig $= 1$ sein muss, folgt daraus, weil für $x = 0$ beiderseits dasselbe Resultat kommen muss, nämlich $\sqrt[n]{.1} = 1$. (Vergl. § 66, Note, und § 67, Anmerkung 2.)

Erhebt man beide Seiten auf die $n$te Potenz, so ist:

$$1 + mx + \frac{m.m-1}{1\ .\ 2}x^2 + \ldots = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots)^n$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass die beiden ersten Glieder von der Entwickelung rechter Hand nothwendig $1 + nAx$ sein müssen;*) denn verwandelt man das in Klammern stehende Polynom in ein Binom, indem man die Summe aller auf 1 folgenden Glieder $= z$ setzt, so ist, weil n eine ganze Zahl:

$$(1 + Ax + Bx^2 + \ldots.)^n = (1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n.n-1}{1\ .\ 2}z^2 + \ldots.$$

oder, für z wieder seinen Werth gesetzt, kommt:

$$(1+Ax+Bx^2+..)^n = 1+n(Ax+Bx^2+..)+\frac{n.n-1}{1\ .\ 2}(Ax+Bx^2+..)^2+..$$

Es ist also:

$$1+mx+\frac{m.m-1}{1\ .\ 2}x^2+\ldots = 1+nAx+(nB+\frac{n.n-1}{1\ .\ 2}A^2)x^2+\ldots.$$

Da nun die Coefficienten von gleich hohen Potenzen von x gleich sein müssen, so hat man zur Bestimmung des fraglichen ersten Coefficienten A die Gleichung $nA = m$, woraus: $A = \frac{m}{n}$, also A gleich dem Exponenten p. Wäre in $(1+x)^p$ der Exponent p eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so ist

$$(1 + x)^{-p} = \frac{1}{(1 + x)^p} = \frac{1}{1 + px + \ldots} = 1 - px + \ldots$$

*) Dies folgt schon aus § 19, Anmerkung, nach welchem man auch die übrigen Glieder auf einem etwas längern Wege direct bestimmen könnte.

Die wirkliche Division zeigt nämlich, dass auch für diesen Fall der fragliche erste Coefficient A in der Entwickelung von $(1+x)^{-p}$ gleich dem Exponenten sein muss. (§ 65.)

69.

Nehmen wir also an, es gäbe für $(1+x)^p$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe und setzen:

$$(1+x)^p = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots (1),$$

so wissen wir jetzt, dass unter allen Umständen, was auch der Exponent p sein möge, der erste Coefficient $A = p$ sein muss. Die übrigen Coefficienten B, C, D... bestimmt man nun leichter nach folgender häufig Anwendung findenden fruchtbaren Methode.

Weil die Coefficienten A, B,... nur von p abhängen und dieselben bleiben müssen, wenn man für die veränderliche Grösse x allerlei Werthe setzt, so setzen wir, um auf eine andere Form zu kommen, in (1) $x+u$ statt x,*) so ist

$$(1+\overline{x+u})^p = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots.$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach Potenzen von u, jedoch nur so weit, dass die Coefficienten von u in der ersten Potenz zusammengefasst werden können, indem wir die Coefficienten von u^2, u^3..., die wir mit M, N... bezeichnen wollen, nicht zu kennen brauchen, so kommt

$$(1+x+u)^p = \begin{cases} 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\ \quad\; Au + 2Bxu + 3Cx^2u + \ldots \\ \quad\; Mu^2 + Nu^3 + \ldots \end{cases}$$

*) Indem man statt der einfachen veränderlichen Grösse x ein Binom $x+u$ setzt (der veränderlichen x einen Zuwachs beilegt), kommt au beiden Seiten statt x eine zweitheilige Grösse $x+u$, wodurch eine weitere Entwickelung ermöglicht wird, die man nach Potenzen von u fortschreiten lassen kann. Durch diesen einfachen Kunstgriff erhält man zwei verschieden geformte, nach u fortschreitende Reihen, die einander gleich sein müssen &c.

oder, weil $(1+x)^p$ statt der obersten Reihe $1+Ax+Bx^2+\ldots.$ gesetzt werden kann, Gleichung (1):

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p+(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3\ldots)u+Mu^2+Nu^3+\ldots.(2)$$

Da nun aber auch $1+x+u=(1+x)\left(1+\frac{u}{1+x}\right)$, mithin

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p\left(1+\frac{u}{1+x}\right)^p$$

und also auch, indem wir in die angenommene Form, Gleichung (1), $\frac{u}{1+x}$ statt x setzen und entwickeln,

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p\left\{1+A\frac{u}{1+x}+B\frac{u^2}{(1+x)^2}+\ldots.\right\} \text{ oder}$$

$$(1+x+u)^p=(1+x)^p+A(1+x)^{p-1}.u+B(1+x)^{p-2}.u^2+\ldots\ldots..(3)$$

Die rechten Seiten in (2) und (3) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse, nur in verschiedener Form, was gerade beabsichtigt wurde. Sie müssen also, wenn man für x einen ganz beliebigen Werth gesetzt denkt, immer noch für jeden Werth von u einander gleich sein, daher (§ 64)

$$A(1+x)^{p-1}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $1+x$, so ist:

$$A(1+x)^p=(1+x)(A+2Bx+3Cx^2+\ldots)$$

oder für $(1+x)^p$ die Reihe aus (1) gesetzt und beiderseits die Multiplicationen ausgeführt, kommt:

$$A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\ldots=A+\left.\begin{matrix}2B\\+A\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}3C\\+2B\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}4D\\+3C\end{matrix}\right|x^3+\ldots..$$

Diese Gleichung muss für jeden Werth von x bestehen, mithin ist (weil $A=p$):

$$2B+A=A^2, \text{ woraus } B=\frac{A(A-1)}{1\,.\,2}=\frac{p\,.\,p-1}{1\,.\,2}$$

$$3C+2B=AB \quad ,, \quad C=\frac{B(A-2)}{3}=\frac{p\,.\,p-1\,.\,p-2}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$4D+3C=AC \quad ,, \quad D=\frac{C(A-3)}{4}=\frac{p\,.\,p-1\,.\,p-2\,.\,p-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$\vdots$

Diese leichte Recursionsregel springt in die Augen. Daher endlich

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p\,.\,p-1}{1\,.\,2}\,.\,x^2+\frac{p\,.\,p-1\,.\,p-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,x^3+\ldots$$

70,

Das in § 27 entdeckte merkwürdige Gesetz, nach welchem für ganze positive Exponenten die Binomial-Coefficienten sich bilden, gilt also ganz allgemein, nämlich auch für negative und Bruchexponenten. Es leuchtet aber ein, dass für solche Exponenten die Reihe nie endlich sein kann, vielmehr eine unendliche wird, jedoch für jeden Werth von $1>x>-1$ stets convergent, also brauchbar ist. Denn, dividirt man mit jedem Gliede in das nächstfolgende, so werden die Quotienten $px, \frac{p-1}{1}.x, \ldots\ldots \frac{p-n}{n+1}x$ immer kleiner und für $n=\infty$, $=-x$, weil $\frac{p-n}{n+1}\,x=\frac{\frac{p}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x$

und $\frac{\frac{p}{\infty}-1}{1+\frac{1}{\infty}}x=-x$ (§ 61).

Aus $(1+x)^p$ oder $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ lässt sich nun auch leicht $(a+x)^{\frac{m}{n}}$ bilden; denn dieser Ausdruck ist

$$=\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ und also}$$

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\cdot\frac{x}{a}+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{1\;.\;2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\ldots\right).$$

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}\cdot x+\frac{m\,.(m-n)}{1\;.\;2\,.\,n^2}a^{\frac{m}{n}-2}x^2+\ldots$$

71.

Aufgabe. Man entwickele folgende Potenzen in Reihen:

$(1\underline{+}x)^{\frac{1}{2}}$; $(1\underline{+}x)^{\frac{1}{3}}$; $(1\underline{+}x)^{-\frac{1}{2}}$; $(1+x)^{\frac{1}{n}}$; $(1-x)^{-1}$; $(1+x)^{-n}$.

Auflösung. Man findet:

$$(1\underline{+}x)^{\frac{1}{2}} = 1\underline{+}\tfrac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2\underline{+}\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4\underline{+}-\underline{+}-\ldots\ldots$$

$$(1\underline{+}x)^{\frac{1}{3}} = 1\underline{+}\tfrac{1}{3}x-\frac{1.2}{3.6}x^2\underline{+}\frac{1.2.5}{3.6.9}x^3-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4\underline{+}-\underline{+}\ldots\ldots$$

$$(1\underline{+}x)^{-\frac{1}{2}} = 1\overline{+}\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2\overline{+}\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4\overline{+}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{n}x-\frac{n-1}{2n^2}x^2+\frac{n-1.2n-1}{2\;.\;3\;.\;n^3}x^3-\frac{n-1.2n-1.3n-1}{2\;.\;3\;.\;4\;.\;n^4}x^4+\ldots$$

$$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\ldots$$

$$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n.n+1}{1\;.\;2}x^2-\frac{n.n+1.n+2}{1\;.\;2\;.\;3}x^3+\ldots$$

72.

Obgleich die Wichtigkeit des binomischen Lehrsatzes darin liegt, dass er zur Begründung anderer wichtiger Sätze dient, so wollen wir doch beiläufig noch an einem Beispiel zeigen, wie man ihn, in Ermangelung von Logarithmentafeln, benutzen könnte, um aus einer gegebenen Zahl eine beliebige Wurzel zu ziehen. Es soll z. B. $\sqrt[3]{10}$ gefunden werden.

Man zerlege die gegebene Zahl in zwei solche Theile, ·us dem grössern Theil die Wurzel rational wird.

Es ist z. B. $10=8+2=8(1+\frac{1}{4})$. Also $\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{(1+\frac{1}{4})}$, mithin:

$$\sqrt[3]{10}=2(1+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{3}}=2\left(1+\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{4}-\frac{1.2}{3.6}.\frac{1}{4^2}+\frac{1.2.5}{3.6.9}.\frac{1}{4^3}-+\ldots\right)$$

Je mehr Glieder dieser convergenten Reihe man zusammenrechnet, je genauer erhält man $\sqrt[3]{10}$. Durch kleine Kunstgriffe könnte man die Reihe noch viel convergenter machen. Bestimmt man z. B. für $\sqrt[3]{10}$ vorläufig die ersten Stellen $=2{,}1544\ldots$ und verwandelt diesen Werth durch die Kettenbrüche in den Näherungswerth $\frac{28}{13}$, so ist also sehr nahe $\left(\frac{28}{13}\right)^3=10$, oder genau $\left(\frac{28}{13}\right)^3+u=10$, folglich $u=-\frac{18}{2197}$. Jetzt ist $\sqrt[3]{10}$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{28}{13}\right)^3-\frac{18}{2197}}=\frac{28}{13}\sqrt[3]{1-\frac{9}{10976}}=\frac{28}{13}\left[1-\tfrac{1}{3}.\frac{9}{10976}-\tfrac{1}{9}.\left(\frac{9}{10976}\right)^2-\frac{5}{81}.\left(\frac{9}{10976}\right)^3-\ldots\right],$$

und es genügen diese 4 Glieder, um $\sqrt[3]{10}$ auf 14 Decimalstellen richtig zu erhalten.

Der binomische Lehrsatz hat aber, wie gesagt, einen ganz andern und wichtigern Zweck, als die Wurzeln aus Zahlen zu ziehen, was viel bequemer vermittelst der Logarithmen geschieht.

Exponentialreihe.

73.

Die Function a^x heisst Exponential-Function. In derselben ist die Basis $a>1$ eine constante, der Exponent x aber eine veränderliche Grösse. Es ist von grosser Wichtigkeit, auch diese Function in eine nach ganzen positiven Potenzen des Exponenten fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Ist überhaupt eine solche Reihe möglich, so muss (weil für $x=0$, $a^0=1$ ist) ihr erstes Glied nothwendig 1 sein. Wir setzen also

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Wenden wir jetzt wieder den im § 69 mitgetheilten Kunstgriff an und setzen $x+u$ statt x, so ist:

$$a^{x+u}=1+A(x+u)+B(x+u)^2+C(x+u)^3+\ldots$$

Entwickeln wir die rechte Seite nur so weit, dass die Glieder mit u in der ersten Potenz in eins zusammengefasst werden können und setzen für die mit-erscheinende Reihe $1+Ax+Bx^2+\ldots.$ die Grösse a^x aus (1), so ist:

$$a^{x+u}=a^x+(A+2Bx+3Cx^2+\ldots)u+Mu^2+\ldots.(2)$$

Nun ist aber auch: $a^{x+u}=a^x.a^u=a^x(1+Au+Bu^2+\ldots)$ mithin auch

$$a^{x+u}=a^x+Aa^xu+Ba^xu^2+Ca^xu^3+\ldots\ldots(3)$$

Die rechten Seiten für (2) und (3) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse und müssen für jedes u einander gleich sein, daher (§ 64)

$$Aa^x=A+2Bx+3Cx^2+\ldots$$

oder linker Hand für a^x die Reihe aus (1) gesetzt und mit A multiplicirt, ist für jedes x:

$$A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\ldots=A+2Bx+3Cx^2+\ldots$$

hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{r} A=A \\ 2B=A^2 \\ 3C=AB \\ 4D=AC \end{array}\right\} \begin{array}{rl} & B=\frac{A^2}{1.2} \\ \text{mithin:} & C=\frac{AB}{3}=\frac{A^3}{1.2.3} \\ \text{„} & D=\frac{AC}{4}=\frac{A^4}{1.2.3.4} \end{array}$$

&c.

Es ist also:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots (4)$$

Hätten wir den ersten ganz unbestimmt gebliebenen Coefficienten A, so hätten wir auch die übrigen. Wie aber diesen finden? Dass er von der Basis abhängt und sich mit dieser ändert, ist klar; auch lässt sich leicht eine Reziehung zwischen ihm und der Basis aufstellen. Da nämlich die Exponential-Reihe (4) für jeden Werth von x gelten muss, so setze man $x=1$, dann ist

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{A^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots (5)$$

Diese Beziehung ist aber offenbar nicht geeignet, um darnach A aus a zu berechnen. Dies kann aber, wie wir gleich sehen werden, mit Hülfe der Logarithmen geschehen. Der Coefficient A ist jedenfalls durch die Basis a bestimmt. Aber auch umgekehrt ist die Basis a durch A bestimmt, und zufolge Gleichung (5) durch eine convergente Reihe zu finden (§ 61). Unter allen Werthen von a muss es einen solchen geben, für welchen der dadurch bestimmte Coefficient $A = 1$ wird. Bezeichnen wir also die für $A=1$ bestimmte Basis mit e, so ist, indem man in (5) $A=1$ setzt:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots (6)$$

$$e = 2{,}718281828459045\ldots.$$

Setzen wir also in (4) e statt a, so haben wir (weil für diese Basis e der Coefficient $A=1$ ist) vorläufig doch eine Exponentialgrässe in eine Reihe verwandelt, nämlich:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots\ldots (7)$$

wo nun aber die Basis e die bestimmte Zahl 2,71828... bedeutet.

Um die Exponentialgrösse für jede andere Basis a in eine Reihe verwandeln zu können, bringen wir Gleichung (7) in folgende Form:

$$e^{ux} = 1 + ux + \frac{(ux)^2}{1\,.\,2} + \frac{(ux)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

oder

$$(e^u)^x = 1 + x.u + \frac{1}{1.2}(x.u)^2 + \frac{1}{1.2.3}(x.u)^3 + \ldots. \quad (8).$$

Setzt man $e^u = a$, so ist, wenn die Briggs'schen Logarithmen mit log. bezeichnet werden:

$$u \log e = \log a \text{ oder}$$

$$u = \frac{\log a}{\log e}.$$

Mit diesen Ausdrücken verwandelt sich (8) in

$$a^x = 1 + x.\frac{\log a}{\log e} + \frac{1}{1.2}\left(x.\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}.\left(x.\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \ldots$$

welche Reihe für jedes endliche a und x convergent, und worin $\log e = \log 2{,}718281828 = 0{,}4342944819\ldots.$ ist.

74.

Bei allen wirklichen logarithmischen Rechnungen sind die Briggs'schen Logarithmen, bei welchen bekanntlich 10 die Basis ist, wegen der leicht zu bestimmenden Kennziffer, die bequemsten und immer ausreichend. In der höhern Mathematik aber, jedoch nur in der Theorie, stellen sich noch andere Logarithmen ein, welche die vorhin gefundene Zahl e $(= 2{,}71828\ldots)$ zur Basis haben, und zur Unterscheidung von den Briggs'schen die natürlichen Logarithmen heissen und durch log. nat. oder kürzer mit dem einfachen Buchstaben l bezeichnet werden.

Weil nun in jedem Logarithmensystem der Logarithmus von $0 = -\infty$; von $1 = 0$, und von der Basis $= 1$ ist, so ist

auch, wenn man sich das natürliche Logarithmensystem, dessen Basis e ist, berechnet denkt,*) log. nat. $0 = -\infty$ oder kürzer $l0 = -\infty$; $l1 = 0$; $le = 1$ (weil $e^{-\infty} = 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$). Nehmen wir also in der vorhin gefundenen Exponentialreihe statt der Briggs'schen Logarithmen die natürlichen, so schreibt man diese Reihe $\left(\text{weil} \frac{\log. a}{\log. e} = \frac{\log.\text{nat}. a}{\log.\text{nat}. e} = \frac{la}{le} = \frac{la}{1}\right)$ einfacher so:

$$a^x = 1 + x.la + \frac{(x.la)^2}{1.2} + \frac{(x.la)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Logarithmische Reihe.

75.

Obgleich keine Logarithmen-Systeme mehr zu berechnen sind, indem die Arbeit schon geschehen, so ist es doch für die Theorie wichtig, auch die logarithmischen Functionen log. $(1+x)$ und $l(1+x)$ in Reihen zu entwickeln.**) Wir nehmen zuerst letztere Function, nämlich den natürlichen Logarithmus, dessen Basis e. Dem Begriffe der Logarithmen zufolge ist nun: $(1+x)^n = e^{n.l(1+x)}$***) und, indem man für die rechte Seite die entsprechende Reihe setzt (Gleich. 7, § 73):

$$(1+x)^n = 1 + n\,l(1+x) + \frac{[n\,l(1+x)]^2}{1.2} + \ldots$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = l(1+x) + \frac{n.[l(1+x)]^2}{1.2} = \ldots (1)$$

---

*) Wir werden in § 77 zeigen, wie man in den seltenen Fällen, wo man von einer Zahl den natürlichen Logarithmus wirklich haben muss denselben leicht vermittelst der Briggs'schen Logarithmen finden kann.

**) Der Logarithmus einer eintheiligen Grösse, nämlich lx, lässt sich nicht in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, weil eine solche Reihe für $x = 0$ und für $x = 1$ nicht $-\infty$ und 0 geben kann.

***) Denn nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so hat man: $n.l(1+x) = n.l(1+x).le = n.l(1+x)$, weil $le = 1$. Die hier folgende kurze Ableitung der logarithm. Reihe hat zuerst Cauchy gegeben. (Cours d'analyse.)

Ferner ist auch für $1 > x > -1$, für jeden Werth von n (§ 70):

$$(1+x)^n - 1 = nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(1-n)(2-n)}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

$$(1+x)^n - 1 = nx - \frac{n(1-n)}{1..2}x^2 + \frac{n(1-n)(2-n)}{1.2.3}n^3 + \ldots.$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = x - (1-n).\frac{x^2}{2} + (1-n)\left(1-\frac{n}{2}\right).\frac{x^3}{3} + \ldots.(2)$$

Die Reihen (1) und (2) sind Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse, sie müssen also für $x < 1$ für jeden positiven Werth von n gleich sein, daher:

$$l(1+x) + \frac{n[l(1+x)]^2}{1.2} + .. = x - (1-n).\frac{x^2}{2} + (1-n)\left(1-\frac{n}{2}\right).\frac{x^3}{3} + ..$$

Lässt man n bis zu Null abnehmen, so ist

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \ldots\ldots.(3)$$

Diese sogenannte logarithmische Reihe ist aber, wie man sieht, nur convergent für $x \leqq 1$.*)

---

*) Will man diese logarithmische Reihe nach der Methode der unbestimmmten Coefficienten ableiten, so setze man, weil das erste Glied den Factor x enthalten muss (indem für $x=0$ auch $l(1+x)=0$):

$$l(1+x) = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

Die Coefficienten $a, b, c, \ldots.$ sind durch die Basis des Logarithmen-Systems bestimmt. Nehmen wir das sogenannte natürliche System, dessen Basis $e = 2{,}7182\ldots$, so ist auch, weil die fingirte Reihe der natürliche Logarithmus von der Zahl $1+x$ sein soll:

$$1+x = e^{ax+bx^2+cx^3+\ldots.} \text{ oder [§ 73, (7)]:}$$

$$1+x = 1 + ax + bx^2 + \ldots + \frac{(ax+bx^2+\ldots)^2}{1.2} + \frac{(ax+bx^2+\ldots)^3}{1.2.3}$$

Setzt man $x=1$, so ist:

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \ldots .$$

$$l2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).2n} + \ldots$$

$$\begin{array}{l|l|l} 1 + ax + b & x^2 + c & x^3 + \ldots \\ \quad + \frac{a^2}{1.2} & + \frac{2ab}{1.2} & + \ldots \\ & + \frac{a^3}{1.2.3} & + \ldots \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich zuerst $a=1$ (§ 64). Die übrigen Coefficienten bestimmt man nun leichter durch den § 69 gezeigten Kunstgriff. Aus:

$$l(1+x) = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 \text{ \&c.} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

folgt: $l(1+x+u) = (x+u) + b(x+u)^2 + \ldots$

$$l(1+x+u) = \begin{cases} x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots \\ (1 + 2bx + 3cx^2 + \ldots)u + Mu^2 + \ldots \end{cases}$$

$$l(1+x+u) = l(1+x) + (1 + 2bx + 3cx^2 + \ldots)\, u + Mu^2 + \ldots (2)$$

Nun ist auch: $1+x+u = (1+x)\left(1 + \frac{u}{1+x}\right)$, mithin:

$l(1+x+u) = l(1+x) + l\left(1 + \frac{u}{1+x}\right)$ oder indem man in (1) $\frac{u}{1+x}$ statt x setzt:

$$l(1+x+u) = l(1+x) + \frac{u}{1+x} + \frac{b.u^2}{(1+x)^2} + \ldots\ldots\ldots (3)$$

Die Reihen (2) und (3) müssen für jeden Werth von u einander gleich sein, daher:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + \ldots$$

Multiplicirt man beiderseits mit $1+x$, so ist:

$$1 = \left\{ \begin{array}{r|l|l|l} 1 + 2b & x + 3c & x^2 + 4d & x^3 + \ldots \\ 1 & + 2b & + 3c & + \ldots \end{array} \right.$$

$2b+1=0$, $3c+2b=0$ &c., woraus: $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$ &c. also:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

Diese Reihe für $l2$ ist ein wahres Muster von schlechter Convergenz. Um ihre Summe nur bis auf die siebente Decimale genau zu erhalten, müsste man schon mehr als tausend Glieder zusammenfassen; denn das tausendste Glied ist $=\frac{1}{(2000-1)2000}=0{,}0000002\ldots$ und hat also noch Einfluss auf die siebente Decimale.

76.

Beiläufig wollen wir hier noch zeigen, wie sich aus der logarithmischen Reihe eine sehr convergente Reihe ableiten lässt, nach welcher man, wenn es noch erforderlich wäre, sowohl die natürlichen, als auch die Briggs'schen Logarithmen ohne Vergleich leichter berechnen könnte, als nach der, in der Algebra gezeigten, elementaren Methode.

Setzen wir in der Reihe

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\ldots(1)$$

$-x$ statt x, so ist auch (indem man in (1), (2), (3) § 75, $-x$ statt $+x$ gesetzt denkt):

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

welche ebenfalls für $x<1$ convergent ist und ein negatives Resultat giebt, weil die Logarithmen von echten Brüchen negativ sind.

Subtrahirt man beide Gleichungen und beachtet, dass

$l(1+x)-l(1-x)=l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (Algebra § 278), so kommt

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)\ldots\ldots(3)$$

Setzen wir hierin $\frac{1+x}{1-x}=z$, so ist $x=\frac{z-1}{z+1}$ und

$$lz=2\left\{\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5+\ldots\right\}\ldots(4)$$

Nach dieser zwar sehr langsam convergirenden Reihe könnte man den natürlichen Logarithmus einer beliebigen Zahl z berechnen. Wollte man aber das ganze natürliche Logarithmensystem haben, so würde es ungemein viel leichter sein, die Logarithmen successive für die unmittelbar auf einander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4.... zu berechnen, indem man dann vorhergegangene Rechnungen für die folgenden benutzen kann. Eine für diesen Zweck sehr convergente Reihe ergiebt sich, wenn man in (3) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{p+1}{p}$ und also $x=\frac{1}{2p+1}$ setzt. Dann ist

$$l\left(\frac{p+1}{p}\right)=2\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3(2p+1)^3}+\frac{1}{5(2p+1)^5}+\ldots\right)$$

oder, weil $l\left(\frac{p+1}{p}\right)=l(p+1)-lp$:

$$l(p+1)=lp+2\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{3(2p+1)^3}+\frac{1}{5(2p+1)^5}+\ldots\right)\ldots(5)$$

Setzt man hierin nach und nach $p=1, 2, 3\ldots$ und berücksichtigt, dass $l1=0$; $l4=l2+l2$; $l6=l2+l3$ ist &c., so hat man:

$$l2=l1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\ldots\right)=0{,}6931471806.$$

$$l4=2l2=1{,}3862943612.$$

$$l5=l4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\ldots\right)=1{,}6094379124.$$

$$l10=l2+l5=2{,}3025850930.$$

Die Reihe (5) wird offenbar desto convergenter, je grösser p wird. Wollte man z. B. die Logarithmen nur bis auf fünf Decimalen genau haben, so würde schon von der Zahl $p=50$ an das zweite Glied nicht mehr in Betracht kommen.

77.

Obgleich in der höheren Mathematik immer nur natürliche Logarithmen vorkommen, und dieses natürliche System, wie

eben gezeigt, nach der Reihe (5) auch wirklich berechnet worden (und unter andern in den Callet'schen Tafeln mit eingetragen ist), so kann man dennoch dieses natürliche Logarithmensystem recht gut entbehren, indem erstens für wirkliche logarithmische Ziffernrechnungen die gewöhnlichen Briggs'schen Logarithmen viel bequemer sind, und zweitens in den seltnern Fällen, wo die natürlichen Logarithmen wirklich selbst erforderlich sind, dieselben leicht aus den Briggs'schen, so wie auch umgekehrt die Briggs'schen Logarithmen aus den natürlichen abgeleitet werden können und bei der neuern Berechnung (von Vega, Callet) auch wirklich abgeleitet worden sind. Dazu ist nur die Kenntniss des natürlichen Logarithmus von 10 erforderlich, den wir zu diesem Zweck in § 76 eigens berechnet haben.

Bedeutet nämlich n den natürlichen und b den Briggs'schen Logarithmus einer und derselben Zahl N, so dass also $10^b =$ N und auch $e^n =$ N, mithin $10^b = e^n$ ist, so kommt, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt und beachtet, dass $le = 1$,

$$b . l10 = n$$

$$\text{hieraus: } b = \frac{1}{l10} . n$$

d. h. man erhält den Briggs'schen Logarithmus b einer beliebigen Zahl N, indem man den natürlichen Logarithmus n derselben Zahl mit dem sogenannten Modulus $\text{M} = \frac{1}{l10} = 0{,}434294482\,..$ multiplicirt, und umgekehrt erhält man den natürlichen Logarithmus n einer beliebigen Zahl, wenn man den Briggs'schen Logarithmus b derselben Zahl durch den Modulus $\frac{1}{l10} = 0{,}43429\ldots$ dividirt, oder also auch mit $l10 = 2{,}30258509299\ldots$ multiplicirt. Wegen ihrer grössern Basis (10) sind die Briggs'schen Logarithmen offenbar immer kleiner, als die natürlichen (die Zahl 1 ausgenommen, indem sowohl $\log 1 = 0$, als auch $l1 = 0$).

78.

Setzt man in der in § 75 erhaltenen Reihe $x=1$, so ergibt sich

$$a=1+la+\frac{(la)^2}{1.2}+\frac{(la)^3}{1.2.3}+\ldots.$$

Mittelst dieser Reihe lässt sich unmittelbar aus einem gegebenen Logarithmus der zugehörige Numerus finden. Ist z. B. $\log a = 0{,}0007$, so ist (§ 77) $la = 2{,}302585 . 0{,}0007 = 0{,}00161181$ und

$$a=1+0{,}00161181+\frac{0{,}00161181^2}{1\,.\,2}+\ldots.$$

$$a=1{,}00161311.$$

Convergirt dagegen für ein grösseres la die Reihe nicht schnell genug, so sucht man zunächst mittelst der Kettenbrüche den Näherungswerth $\frac{b}{c}$, der in gewünschter Weise zu dem Numerus a führt, wenn die Logarithmen von b und c schon bekannt sind. Denn setzt man $a=\frac{b}{c}.y$, so ist y sehr wenig von 1 verschieden, ly mithin sehr klein und es ist

$$la=l.\frac{b}{c}+ly \text{ oder}$$

$$ly=la+lc-lb.$$

Dieser Werth für ly führt mittelst der ungemein schnell convergirenden Reihe

$$y=1+ly+\frac{(ly)^2}{1.2}+\ldots.$$

zu dem Numerus y und es ergibt sich

$$a=\frac{by}{c}.$$

Kreisfunctionen.

79.



Setzt man den Radius CM=1, so ist für einen Bogen $\widehat{AM} = x$ schon die auf CA senkrechte Linie MP der Sinus und CP der Cosinus dieses Bogens x. Die Frage ist nun, ob sowohl $\sin x$ als $\cos x$, beide als Functionen des veränderlichen Bogens x gedacht, sich in Reihen entwickeln lassen, die nach ganzen positiven Potenzen des Bogens x fortschreiten.*)

Fingiren wir vorläufig diese Reihen und setzen

$$\sin x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$
$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

so ist zuvor klar, dass, wenn beide Reihen überhaupt möglich sind, nothwendig $A_0 = 0$ und $a_0 = 1$ sein muss. Denn da für jeden Werth von x rechter Hand dasselbe Resultat kommen muss, wie linker Hand, so setze man $x = 0$, so kommt (weil dann alle mit x, x^2...multiplicirten Glieder $= 0$ sind) $\sin 0 = A_0$ und $\cos 0 = a_0$, woraus, weil $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$, auch $A_0 = 0$ und $a_0 = 1$. Beide Reihen wären also etwas näher bestimmt

---

*) Den Bogen x muss man sich hier nicht in Graden, sondern in Theilen des Halbmessers ausgedrückt denken (Trigonometrie § 62a). Ist der Radius $= 1$, so ist der Umfang $= 2\pi$, welche Zahl also an Stelle der 360^0 zu setzen ist. Der Bogen von 1^0 hat also eine Länge von $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ und kämen z. B. auf den Bogen AM 18^0, so wäre die Länge desselben $18 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10} = 0{,}314159\ldots.$ Der Grund dass hier auch der Bogen x in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden muss, liegt darin, weil in jeder Gleichung alle Glieder gleichartig sein müssen und die trigonometrische Function eines Bogens, wie $\sin x$, $\cos x$ &c., als unbenannte Zahl (Trigonometrie § 7) nicht gleich einer Summe von Graden sein kann.

$$\sin x = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots (1)$$
$$\cos x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots (2)$$

Aus der Gleichung (1) folgt

$$\frac{\sin x}{x} = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$$

Nun ist zwar (weil der Sinus kleiner als der Bogen) der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ immer ein echter Bruch, der aber der Einheit desto näher kommt, je kleiner der Bogen wird (Trigon. § 62b). Lässt man also (in Gedanken) den Bogen x bis zum Verschwinden immer kleiner werden (bis zu Null convergiren), so wird zu gleicher Zeit auch der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ der Einheit immer näher und näher kommen und sie zuletzt (für $x = 0$) wirklich erreichen. Für $x = 0$ fallen aber rechter Hand alle Glieder in x weg, und es bleibt noch $\frac{0}{0} = A_1 = 1$. Der Coefficient A_1 muss also nothwendig $= 1$ sein und Gleichung (1) ist

$$\sin x = x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots (3).$$

Setzt man hier $-x$ statt x, so entsteht

$$-\sin x = -x + A_2 x^2 - A_3 x^3 \ldots\ldots$$

Diese Gleichung von (3) subtrahirt:

$$2 \sin x = 2x + 2 A_3 x^3 + 2 A_5 x^5 + \ldots \text{ oder}$$
$$\sin x = x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \ldots (4).$$

Substituirt man in gleicher Weise in Gleichung (2) $-x$ für x, so erhält man

$$\cos x = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots$$

und diese Gleichung zu (2) addirt:

$$2 \cos x = 2 + 2a_2 x^2 + 2a_4 x^4 + \ldots \text{ oder}$$
$$\cos x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots (5).$$

80.

Die durch (4) und (5) noch näher bestimmte Form der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ kann also einfacher

$$\sin x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots$$
$$\cos x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \ldots.$$

gesetzt werden.

Um hier die Coefficienten A, B... a, b... zu bestimmen, operiren wir folgendermassen:

$$\sin x + \cos x = 1 + x + ax^2 + Ax^3 + bx^4 + \ldots$$

Setzen wir, um auf eine andere Form zu kommen, $x+z$ statt x, so ist auch

$$\sin(x+z) + \cos(x+z) = 1 + (x+z) + a(x+z)^2 + A(x+z)^3 + \ldots\ldots$$

oder auch (Trigonometrie § 100, 9 und 10):

$$\left.\begin{matrix}(\sin x + \cos x)\cos z + \\ (\cos x - \sin x)\sin z\end{matrix}\right\} = 1 + (x+z) + a(x+z)^2 + A(x+z)^3 + \ldots\ldots$$

Substituiren wir linker Hand die fingirten Reihen und entwickeln rechter Hand die Potenzen von $x+z$ nur so weit, dass die Glieder mit z in der ersten Potenz zusammengefasst werden können, so haben wir

$$\left.\begin{matrix}(1+x+ax^2+Ax^3+..)\,(\underline{1}+az^2+bz^4+..) \\ (1-x+ax^2-Ax^3+..)\,(z+Az^3+Bz^5+.)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1+x+ax^2+Ax^3+\ldots \\ (1+2ax+3Ax^2+4bx^3+..)z+Mz^2+..\end{matrix}\right.$$

Das Product linker Hand enthält einen Theil, welcher der obersten Reihe rechter Hand gleich ist. Diese können wir also gegen die unterstrichene Einheit ($\underline{1}$) weglassen. Dividirt man dann beiderseits durch z, so hat man

$$\left.\begin{matrix}(1+x+ax^2+Ax^3+..)\,(az+bz^3+\ldots\ldots..) \\ (1-x+ax^2-Ax^3+..)(1+Az^2+Bz^4+..)\end{matrix}\right\} = 1+2ax+3Ax^2+\ldots+Mz+Nz^2+\ldots\ldots$$

Denkt man für x einen beliebigen Werth gesetzt, so müssen noch für jeden Werth von z beiderseits gleiche Resultate kommen. Setzen wir also $z=0$, so muss für jeden Werth von x

$$1-x+ax^2-Ax^3+bx^4-Bx^5+\ldots = 1+2ax+3Ax^2+4bx^3+5Bx^4+..$$

sein, mithin ist (§ 64)

$2a = -1,\ 3A = a,\ 4b = -A,\ 5B = b,\ 6c = -B$ etc.

$$\text{hieraus: } a = -\frac{1}{1.2},\ A = -\frac{1}{1.2.3},\ b = \frac{1}{1.2.3.4},$$

$$B = \frac{1}{1.2.3.4.5} \ \&c.$$

Die Coefficienten ergeben sich also nach einer deutlichen und einfachen Recursionsregel. Es ist nämlich

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots \quad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - + \ldots \quad (7)$$

Nach diesen sehr convergenten Reihen*) könnten nun, wenn es noch nöthig wäre, die trigonometrischen Functionen leicht berechnet werden. Aus den Lehren der Trigonometrie ist bekannt, dass dieses nur für den ersten Quadranten (eigentlich nur von 0 bis $\frac{\pi}{4}$) zu geschehen braucht, indem für

---

*) Die Reihen sind für ein noch so grosses x doch stets convergent. Denn wäre $x = 100$ (in Theilen des Halbmessers, in Graden also $= 100 . \frac{180}{\pi} = 5729{,}578$ Grad), so würden zwar die Glieder der Reihe

$$\sin 100 = 100 - 166666\tfrac{2}{3} + 8333333\tfrac{1}{3} - \ldots.$$

zunächst immer grösser, die Summe der Reihe müsste aber doch bis zu einem bestimmten Gliede, z. B. dem Gliede $-\frac{100^{199}}{1.2\ldots.199}$, welches $= -a$ gesetzt werden mag, eine endliche Zahl $=$ S sein. Die nun folgenden Glieder bilden alsdann die unendliche Reihe

$$+ a . \frac{100^2}{200 . 201} - a . \frac{100^4}{200 . 201 . 202 . 203} + \ldots.,$$

deren Glieder offenbar kleiner als die Glieder der Reihe $a . \frac{1}{4} - a . \frac{1}{4^2} + a . \frac{1}{4^3} - \ldots$ sind (s. auch § 63). Die Summe der gegebenen Reihe ist mithin eine endliche Zahl, die kleiner als $S + \frac{a}{4}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \ldots.) = S + \frac{a}{4} . \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = S + \frac{a}{5}$ ist.

grössere Bögen die Werthe der trigonometrischen Functionen periodisch wiederkehren. Dass nun aber die für sin x und cos x gefundenen Reihen nicht blos für den ersten Quadranten (was für den rein trigonometrischen Zweck genügend wäre), sondern auch für jeden beliebig grossen Bogen gültig sind und alle Eigenschaften der trigonometrischen Functionen sin x und cos x besitzen, wodurch zugleich die allgemeine Richtigkeit der Reihen bewiesen ist, wird sich in § 85 zeigen.*)

Dividirt man die Reihen (6) und (7) nach den Regeln der Partialdivision, so ergiebt sich aus $\frac{\sin x}{\cos x}$ und $\frac{\cos x}{\sin x}$:

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x}{45} - \frac{2x^5}{315} - \ldots\ldots (9)$$

Ferner ist $\sin(x+u) = \sin x \cos u + \cos x \sin u$

$$= \sin x\left(1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} \ldots\right) + \cos x\left(u - \frac{u^3}{3!} + \ldots\right) \text{ oder}$$

$$\sin(x+u) = \sin x + u\cos x - \frac{u^2}{2}\sin x - \frac{u^3}{3!}\cos x + \frac{u^4}{4!}\sin x + \ldots (10)$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$\cos(x+u) = \cos x - u\sin x - \frac{u^2}{2}\cos x + \frac{u^3}{3!}\sin x + \ldots (11)$$

tg $(x+u)$ kann wie vorher sin $(x+u)$ durch Zerlegung oder durch Division der Reihen (10) und (11) bestimmt werden.

Man erhält $tg\,(x+u) = tg\, x + \frac{u}{\cos^2 x} + \frac{u^2\, tg\, x}{\cos^2 x} + \ldots (12)$

Eben so $\cot(x+u) = \cot x - \frac{u}{\sin^2 x} + \frac{u^2 \cot x}{\sin^2 x} - \ldots (13)$

Um den **Bogen** aus Sin. zu bestimmen, setzt man zunächst

$$x = \alpha \sin x + \beta \sin^2 x + \gamma \sin^3 x + \delta \sin^4 x + \ldots$$

---

*) Es liesse sich dies auf ganz elementare Weise, jedoch weitläufiger, auch schon hier zeigen. Quadrirt man z. B. beide Reihen, so ist die Summe ihrer Quadrate für jeden Werth von x immer $= 1$ &c.

Statt x: $-x$ gesetzt:

$$-x = -\alpha \sin x + \beta \sin^2 x - \gamma \sin^3 x + \ldots .$$

Die Differenz beider Gleichungen durch 2 dividirt giebt

$$x = \alpha \sin x + \gamma \sin^3 x + \varepsilon \sin^5 x + \ldots . \quad (14)$$

Setzt man nun in Gleichung (6) für x die rechte Seite der Gleichung (14), so ergiebt sich

$$\sin x = \alpha \sin x + \gamma \sin^3 x \ldots - \frac{1}{6}(\alpha \sin x + \gamma \sin^3 x + \ldots)^3 + \ldots .$$

oder $\sin x = \alpha \sin x + \left(\gamma - \frac{\alpha^3}{6}\right) \sin^3 x + \ldots$

Folglich ist $\alpha = 1$ und $\gamma - \frac{\alpha^3}{6} = 0$ oder

$$\gamma = \frac{\alpha^3}{6} = \frac{1}{6} \text{ u. s. w.}$$

Mit diesen Werthen geht (14) über in:

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{1.3 \sin^5 x}{2.4.5} + \frac{1.3.5 \sin^7 x}{2.4.6.7} + \ldots (15)$$

Für x: $\frac{\pi}{2} - x$ gesetzt giebt

$$\frac{\pi}{2} - x = \cos x + \frac{\cos^3 x}{2.3} \ldots . \text{ oder}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{\cos^3 x}{2.3} - \ldots \ldots \quad (16)$$

Bogen x könnte zwar durch Umkehrung der Gleichung (8) aus $\operatorname{tg} x$ bestimmt werden, wir geben jedoch in § 87 eine andere Ableitung.

Siebentes Buch.

Gebrauch der sogenannten imaginären Grössen und der sich daraus ergebenden Consequenzen. Zurückführung jeder imaginären Function auf die einfache Form: $\alpha + \beta i$.

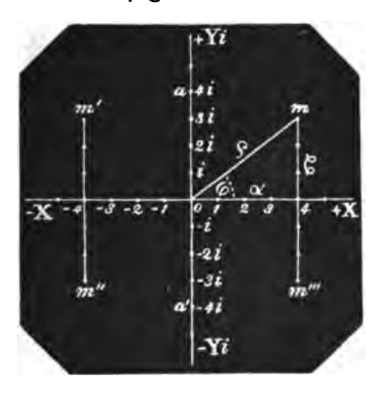
81.

Schon in der Buchstabenrechnung haben sich im Laufe der Rechnung manchmal die sogenannten imaginären (oder lateralen) Grössen eingestellt, und wir haben schon dort darauf aufmerksam gemacht, dass diese Grössen in der höhern Mathematik eine sehr wichtige Rolle spielen, indem man vermittelst derselben, gleichnissweise, aber noch viel mehr, wie in der Trigonometrie vermittelst eines Hülfswinkels, über oftmals entgegentretende grosse Hindernisse wegsetzen und damit auf wichtige Entdeckungen kommen kann. Wir haben schon dort gezeigt, dass man mit diesen Grössen nach den gewöhnlichen Regeln der Buchstabenrechnung eben so gut rechnen kann, wie mit den sogenannten reellen Grössen. (Algebra §§ 325 und 326.) Hier wird es nun zum weitern Fortkommen nothwendig, diese Sache wieder aufzunehmen. Was übrigens die eigentliche Metaphysik, so wie die reelle Bedeutung der sogenannten imaginären Grössen, welche zuerst Gauss in ein helles Licht gesetzt hat, betrifft, so müssen wir den Leser, um hier den ebenen Gang nicht zu unterbrechen, auf den Anhang § 176 verweisen.

82.

Wir bezeichnen wieder mit Gauss das Symbol*) $\sqrt{-1}$ Kürze halber mit i. Um eine bestimmte Vorstellung mit dieser Grösse i zu verbinden, wollen wir sie als Einheit einer neuen Zahlenreihe betrachten.

Alle vier Arten Zahlen, nämlich sowohl die sogenannten positiven und negativen reellen, als die sogenannten positiven und negativen imaginären, so wie auch die aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzten (complexen) Grössen, können wir nun, wie Gauss gezeigt, folgendermassen bildlich darstellen, gleichsam versinnlichen.



Man denke sich in einer unbegrenzten Ebene zwei auf einander senkrechte Linien XX und YY und trage dann vom Durchschnittspunkt 0 aus die positiven reellen Zahlen auf 0(+X), die negativen nach entgegengesetzter Richtung, dann seitwärts (lateral) die positiven imaginären Zahlen auf 0(+Yi) und die negativen wieder nach entgegengesetzter Richtung ab. So stellt z. B. der Punct a (nämlich die Linie 0 a) die Zahl $4i$ dar, und in dem Punct a' findet man die Zahl $-4i$, die Zahl $2\frac{1}{2}$ fällt in die Mitte zwischen 2 und 3, die Zahl $\sqrt{5}$ fällt ebenfalls zwischen 2 und 3, die Zahl $-\sqrt{2}.i = -1{,}414i$ liegt zwischen $-i$ und $-2i$ &c. Um die complexen Grössen bildlich darzustellen, betrachte man die reelle Grösse als Abscisse und den reellen Factor von i als Ordinate. So stellen z. B. die beiden Linien $\overline{04}$ und $\overline{4m}$ die complexe Grösse $4+3i$ dar. In dem Punct m' findet man die Grösse $-4+3i$, in m'' die Grösse $-4-3i$, in m''' die Grösse $4-3i$.

*) Die Zeichen 1, 2, 3 ... −1, −2 ... sind ebensowohl nur Rechnungssymbole, wie die Zeichen i, $2i$, $3i$, ... $-i$, $-2i$.

83.

Da die Zahlenebene unbegrenzt ist, und ihre Puncte stetig auf einander folgen, so giebt es keine reelle, imaginäre, oder complexe Grösse, welche sich nicht auf die eben gezeigte Weise darstellen liesse.*) Dasselbe kann aber auch durch Polarcoordinaten geschehen. Ist allgemein $\alpha+\beta i$ eine beliebige complexe Grösse, so ist α (z. B. die Linie 04) die Abscisse und β (z. B. die Linie $4m$) die Ordinate des Punctes in der Ebene, welche diese Grösse darstellt. Ferner ist der sogenannte Modulus ϱ dieser complexen Grösse, welcher nichts anderes, als der Radius vector des erwähnten Punctes ist, durch die Gleichung $\varrho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, und der Winkel φ, den dieser immer absolut (positiv) zu nehmende Modulus ϱ mit der Achse $0X$ macht, durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\beta}{\alpha}$ gegeben. Ferner hat man noch:

$$\alpha=\varrho \cos \varphi$$
$$\beta=\varrho \sin \varphi$$

Deshalb kann man auch immer setzen:

$$\alpha+\beta i=\varrho\ (\cos \varphi+i \sin \varphi)$$

84.

Aus der Algebra (§ 325) ist bekannt, dass:

$$\begin{array}{ll} i=\sqrt{-1} & i^{4n+1}=\sqrt{-1}=i \\ i^2=-1\ ^{**)} & i^{4n+2}=-1 \\ i^3=-\sqrt{-1}=-i & i^{4n+3}=-\sqrt{-1}=-i \\ i^4=1 & i^{4n+4}=1 \end{array}$$

---

*) Die unbegrenzte Zahlenlinie hat sich also, als nothwendige Folge unserer Denkgesetze, zu einer unbegrenzten Zahlenebene ausgedehnt. Man kommt deshalb leicht auf den Gedanken, ob es nicht auch in unsern Denkgesetzen liegen und die Nothwendigkeit eintreten könnte, die Zahlenebene sich in einen Zahlenraum ausdehnen zu lassen. Gauss ist jedoch nicht dieser Meinung. (S. Anhang § 176 am Ende.)

**) Denn $i^2=(\pm\sqrt{-1})^2=+(\sqrt{-1})^2=-1$, da allgemein $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

Dies vorausgeschickt, gelangen wir nun durch Vermittelung der Grösse i, indem wir dieselbe, sie gleichsam als eine Hülfsgrösse betrachtend, mit den sogenannten reellen Grössen verbinden und, wie in der Algebra gezeigt, den einfachen Regeln der Arithmetik consequent unterwerfen, zu sehr fruchtbaren Resultaten, welche wir ohne Benutzung dieser Grösse i theils gar nicht, theils nur auf sehr grossen Umwegen erhalten könnten.

85.

Setzen wir in der Exponentialreihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots . (\S\ 73,\ 7)$$

ix statt x, so erhalten wir

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{1.2} + \frac{i^3x^3}{1.2.3} + \frac{i^4x^4}{1.2.3.4} + \frac{i^5x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

oder:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + - ..\right) + i\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + ..\right)$$

Mittelst der Gleichungen (6) und (7) in § 80 erhält man dafür

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)^{*)}$$

Setzen wir hierin $-i$ statt $+i$, so ist:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Um zu zeigen, dass die beiden Reihen alle Eigenschaften der trigonometrischen Functionen cos x und sin x besitzen, mithin auch für jedes x gültig sind, und statt ihrer wirklich die Functionen cos x und sin x gesetzt und aus den fertigen

---

*) Setzt man in dieser Formel $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Also auch $(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$. Mithin: $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi}}$

Diesen merkwürdigen Ausdruck hatte schon Euler gefunden.

trigonometrischen Tafeln entnommen werden dürfen, multiplicire man die beiden Gleichungen (1) und (2) mit einander, so kommt erstlich

$$\cos^2 x + \sin^2 x = e^{ix}\, e^{-ix} = e^0 = 1$$

d. h. die Summe der Quadrate der beiden Reihen ist für jedes $\pm x$ immer $= 1$.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y$$

mit einander, so kommt

$$e^{i(x \pm y)} = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y + i(\sin x \cos y \pm \cos x \sin y)$$

Nun ist aber auch, $x \pm y$ als einen Bogen gedacht:

$$e^{i(x \pm y)} = \cos(x \pm y) + i \sin(x \pm y).$$

Beide für $e^{i(x \pm y)}$ erhaltenen complexen Grössen müssen einander gleich sein. Sollen aber zwei complexe Grössen einander gleich sein, mithin ihre bildliche Darstellung auf einen und denselben Punct in der Zahlen-Ebene führen (§ 82), so müssen nothwendig die reellen und die imaginären Theile einzeln einander gleich sein, daher die bekannten Beziehungen:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos x \pm \cos x \sin y.$$

Anmerkung. Die Moduli der beiden complexen Grössen (1) und (2) sind $\varrho = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Der Punct in der unbegrenzten Ebene, dessen Lage durch die (complexen) Grössen e^{ix} und e^{-ix}, nämlich $\cos x \pm i \sin x$, bestimmt ist, liegt also immer (wie gross auch x sein möge) auf der mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Peripherie.

86.

Durch Addition und Subtraction der beiden vorstehenden Gleichungen (1) und (2) ergeben sich für $\cos x$ und $\sin x$ die nur scheinbar imaginären Ausdrücke:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

87.

Die Division der beiden Gleichungen (1) und (2) § 85 giebt

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

Beiderseits die natürlichen Logarithmen genommen und $l\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}\right)$ nach Formel 3, § 76, entwickelt, indem man dort $i \operatorname{tg} x$ statt x setzt, kommt (weil alle geraden Potenzen von i reell):

$$2ix = 2\left(i \operatorname{tg} x + \frac{i^3 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{i^5 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

$$2ix = 2i\left(\operatorname{tg} x + \frac{i^2 \operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{i^4 \operatorname{tg}^5 x}{5} \ldots\ldots\right)$$

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Reihe ist convergent für alle Werthe von $\operatorname{tg} x$, die nicht grösser als 1 sind. Man kann also darnach Bögen berechnen, deren Tangenten gegeben, und sie deshalb, wie Leibnitz zuerst gezeigt hat, zur Berechnung der Zahl π (Kreisverhältniss) benutzen. Der mit der Einheit beschriebene Bogen, dessen Tangente $= 1$ ist, ist offenbar $\frac{\pi}{4}$. Setzt man also in obige Reihe $\operatorname{tg} x = 1$, so muss man $\frac{\pi}{4}$ statt x setzen, und man hat dann

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots\ldots$$

Diese Leibnitz'sche Reihe ist zwar convergirend, jedoch so ausserordentlich langsam, dass man an tausend Glieder zusammenrechnen müsste, um die Zahl π nur so genau zu

erhalten, als **Metius** sie schon hatte. Es lässt sich jedoch durch einen kleinen Kunstgriff eine convergentere Reihe daraus ableiten.

Euler betrachtete nämlich den halben Quadranten $\frac{\pi}{4}$ als Summe zweier anderer Bögen α und β, deren Tangenten also echte Brüche sind, für welche vorige Reihe stärker convergirt. Nimmt man nun α so, dass $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, so wird, weil $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ und also:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{oder: } \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta} = 1,$$

$$\text{woraus: } \operatorname{tg}\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Da also die Summe zweier Bögen α und β, deren Tangenten beziehlich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind, $= \frac{\pi}{4}$ ist, so setze man in die Reihe (1) einmal $\frac{1}{2}$ und einmal $\frac{1}{3}$ statt $\operatorname{tg} x$ und addire beide Resultate, so hat man:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \ldots$$

Nach dieser **Euler**'schen Reihe liesse sich die Zahl π schon ohne viele Mühe berechnen. Um jedoch eine noch stärker convergirende Reihe zu erhalten, dachte sich **Machin** einen Bogen u, dessen Tangente $= \frac{1}{5}$ ist, dann folgt aus $\operatorname{tg} u = \frac{1}{5}$ dass (Trig. § 100, 19) $\operatorname{tg} 2u = \frac{5}{12}$ und $\operatorname{tg} 4u = \frac{120}{119}$. Es ist also $4u > \frac{\pi}{4}$. Setzen wir nun $4u - \frac{\pi}{4} = v$, so ist

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Mithin muss man, weil $\frac{\pi}{4} = 4u - v$, in die Reihe (1) $\frac{1}{5}$ statt $\operatorname{tg} x$ setzen und den Betrag 4 mal nehmen, so hat man den

Bogen $4u$, setzt man dann noch $\frac{1}{239}$ statt tg x, so erhält man den Bogen v. Daher

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+..\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-...\right).$$

88.

Setzen wir in $e^{\pm ix}=\cos x \pm i \sin x$ (§ 85) nx statt x, so ist:

$$e^{\pm inx}=\cos nx \pm i \sin nx;$$

da nun aber auch $e^{\pm inx}=(e^{\pm ix})^n=(\cos x \pm i \sin x)^n$, so hat man die folgende höchst merkwürdige und für die Folge sehr wichtige Formel, welche, wie Laplace glaubt, zuerst von Moivre gefunden worden, und auch dessen Namen geführt, nämlich

$$(\cos x \pm i \sin x)^n=\cos nx \pm i \sin nx$$

gültig für jeden Werth von n.

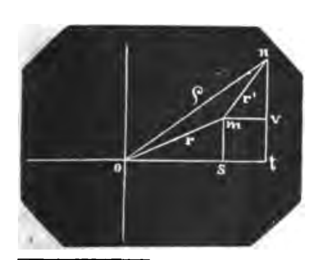
Ferner folgt noch leicht, dass $\left(\text{weil } e^{-ix}=\frac{1}{e^{ix}}\right)$:

$$\frac{1}{\cos x \pm i \sin x}=\cos x \mp i \sin x$$

$$\frac{1}{(\cos x \pm i \sin x)^n}=(\cos x \mp i \sin x)^n=\cos nx \mp i \sin nx.$$

Die nachfolgenden Beispiele werden zeigen, wie man ausser $e^{\pm ix}$ und $(\cos x \pm i \sin x)^n$ auch jeden andern imaginären Ausdruck auf die einfache Form $\alpha+\beta i$ zurückführen kann, wo aber auch α oder $\beta=0$ sein kann.*)

89 a.



Hat man zwei complexe Grössen $a+bi$ und $a'+b'i$ zu addiren, so ist die Summe offenbar $=(a+a')+(b+b').i$. Diese Addition lässt sich auch graphisch bewirken. Stellt nämlich der Punct m in der Zahlenebene die Grösse $a+bi$ dar, so dass also $os=a$

*) Ueber die geometrische Construction der imaginären Grössen siehe Anhang § 177.

und $ms = b$ ist, und man trägt nun, vom Puncte m ausgehend, noch die Grösse $a' + b'i$ auf, so dass $mv = st = a'$ und $nv = b'$ ist, so stellt der Punct n die Summe beider dar. Die Linie $om = r$ stellt den Modulus der ersten, $mn = r'$ den der zweiten complexen Grösse und $on = \varrho$ den Modulus ihrer Summe dar, nämlich

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\quad r' = \sqrt{a'^2 + b'^2} \text{ und } \varrho = \sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2}.$$

Hierbei fällt auf, dass der Modulus von der Summe zweier complexen Grössen, $a + bi$ und $a' + b'i$, entweder unter oder doch höchstens nur gleich der Summe beider Moduli ist. In Zeichen:

$$\sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}.$$

Bilden die beiden Moduli r, r' eine gerade Linie, dann wäre $\varrho = r + r'$.

Zusatz 1. Es folgt hieraus, dass auch der Modulus von der Summe beliebig vieler complexen Grössen entweder unter oder doch höchstens nur gleich der Summe aller Moduli ist, indem man von zwei auf drei, von drei auf vier complexe Grössen schliesst &c.

Zusatz 2. Dass sich auch die Subtraction einer complexen Grösse von einer andern graphisch bewirken und dadurch auch die Ausführung dieser Operation sich versinnlichen lässt, ist für sich klar.

89 b.

Aufgabe. Den Ausdruck $(a + bi).(c + di)$ auf die einfachere Form $\alpha + \beta i$ zu reduciren.

Auflösung. Durch unmittelbare Multiplication erhält man

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc).i.$$

Bei dieser Reduction fällt auf, dass der Modulus des Products aus zwei (oder auch beliebig vielen) complexen Factoren gleich ist dem Product aus den Moduln der einzelnen Factoren. Denn

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)^{*})$$

mithin: $\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{c^2+d^2}$

90.

Aufgabe. Den Ausdruck $\frac{a+bi}{c+di}$ auf die Form $\alpha+\beta i$ zu reduciren.

Auflösung. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $c-di$ so erhält man

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.i.$$

Hierbei fällt auf, dass der Modulus des Quotienten zweier imaginären Grössen gleich ist dem Quotienten aus ihren Moduln. Denn

$$\frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2}+\frac{(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} \text{ \&c.}$$

91.

Aufgabe. Den Ausdruck $(x+yi)^n$ auf die Form $\alpha+\beta i$ zu reduciren.

Auflösung. Man könnte hier den binomischen Lehrsatz anwenden, wenn, für den Fall, dass n ein Bruch oder negativ wäre, die Reihen für die reelle Grösse α und für den Factor β convergirten. Bequemer ist aber jedenfalls, hier die Moivre'sche Formel anzuwenden. Setzen wir nämlich nach § 83 $x\pm yi=\varrho$ $(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$, so ist:

$$(x\pm yi)^n=\varrho^n(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n=\varrho^n\cos n\varphi\pm\varrho^n\sin n\varphi\,.\,i$$

*) Nebenbei bemerkt ist also das Product zweier Zahlen, wovon jede die Summe zweier Quadrate ist, immer gleich der Summe zweier Qnadrate; z. B. $(1^2+2^2)(3^2+4^2)=(1.3-2.4)^2+(1.4+2.3)^2$, d. i. $5.25=5^2+10^2$.

worin $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$ und $\left(\text{weil } \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\right)$: $\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$, mithin auch, wenn man will, so geschrieben

$$(x\pm yi)^n=(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\cos\left(n\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)\pm(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\sin\left(n\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right).i.$$

92.

Aufgabe. Den Ausdruck $l(x+yi)$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist $(x+yi)=x\left(1+\frac{y}{x}i\right)$. Daher

$$l(x+yi)=lx+l\left(1+\frac{y}{x}i\right)$$

mithin (§ 76 [3])

$$l(x+yi)=lx+\frac{y}{x}i-\tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.i^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3.i^3-\tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^4.i^4+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5.i^5-\ldots$$

$$l(x+yi)=lx+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-\tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^4+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^6-\tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^8+-\ldots\right]$$

$$+i\left[\frac{y}{x}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^5-\tfrac{1}{7}\left(\frac{y}{x}\right)^7+-\ldots\right]$$

$$l(x+yi)=lx+\tfrac{1}{2}l\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

$$l(x+yi)=l\sqrt{x^2+y^2}+i\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\ {}^{*)}.$$

93.

Aufgabe. Den Ausdruck $e^{x\pm yi}$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist

$$e^{x\pm yi}=e^x.e^{\pm yi}=e^x.(\cos y\pm i\sin y)=e^x\cos y\pm e^x\sin y.i.$$

---

*) $\tfrac{1}{2}l\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\tfrac{1}{2}l\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)=l\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=l\sqrt{x^2+y^2}-lx.$

94.

Aufgabe. Die Ausdrücke sin (xi) und cos (xi) zu reduciren.

Auflösung. Setzt man in den Formeln § 86 xi statt x, so hat man:

$$\sin(xi) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} . i \text{ (hier ist } \alpha = 0)$$

$$\cos(xi) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ (hier ist } \beta = 0)$$

Aufgabe. In Cauchy's Calcul différentiel findet sich auch die Aufgabe: Die Ausdrücke sin $(y + xi)$ und cos $(y + xi)$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist

$$\sin(y + xi) = \sin y . \cos(xi) + \cos y . \sin(xi)$$

$$\sin(y + xi) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} . \sin y + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cos y . i \ldots . (1)$$

$$\cos(y + xi) = \cos y . \cos(xi) - \sin y . \sin(xi)$$

$$\cos(y + xi) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} . \cos y - \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \sin y . i . \; . . (2)$$

96.

Vermittelst der Moivre'schen Formel ist es nun leicht, die Potenzen von sin x, cos x durch dieselben trigonometrischen Functionen vom Vielfachen des Bogens oder Winkels x auszudrücken.

Setzen wir, Kürze halber:

$$\cos x + i \sin x = u,$$
$$\cos x - i \sin x = v, \text{ so ist}$$

$$u + v = 2 . \cos x, \qquad uv = 1,$$
$$u - v = 2i \sin x, \qquad u^m v^m = 1,$$

und weil (§ 88)

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx = u^m,$$
$$(\cos x - i \sin x)^m = \cos mx - i \sin mx = v^m,$$

so ist auch

$$u^m + v^m = 2 \cos mx,$$
$$u^m - v^m = 2i \sin mx.$$

Dies vorausgeschickt, hat man nun aus der Gleichung $2 \cos x = u + v$ oder $2^m \cos^m x = (u+v)^m$, wenn man das Binom entwickelt, indem hier der Exponent m eine ganze positive Zahl bedeutet

$$2^m \cos^m x = u^m + m u^{m-1}.v + \frac{m.m-1}{1\,.\,2} u^{m-2}.v^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1\,.\,2\,.\,3} u^{m-3}.v^3 + \ldots\ldots + m u v^{m-1} + v^m$$

$$2^m \cos^m x = u^m + m.u^{m-2}.uv + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}.u^{m-4}.u^2v^2 + \ldots + m.uv.v^{m-2} + v^m$$

$$2^m \cos^m x = (u^m + v^m) + m(u^{m-2} + v^{m-2}) + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}(u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots$$

$$2^m \cos^m x = 2.\cos mx + m.2\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}.2\cos(m-4)x + \ldots$$

Da die Coefficienten der Binomialreihe, die von Anfang und Ende gleich weit abstehen, gleich sind, und (wie nöthigenfalls durch ein bestimmtes Beispiel klar wird)*) für eine gerade Anzahl Glieder (also m ungerade) jeder der beiden mittlern mit u und v multiplicirten Coefficienten $= \dfrac{m.m-1.m-2\ldots\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}$

und für eine ungerade Anzahl Glieder (also m gerade) das mittlere

*) $2^5 \cos^5 x = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$

$2^5 \cos^5 x = (u^5 + v^5) + 5.(u^3 + v^3) + \frac{5.4}{1.2}(u+v)$

$2^5 \cos^5 x = 2.\cos 5x + 5.2\cos 3x + \frac{5.4}{1.2}.2\cos x$

$$\text{Glied} = \frac{m\,.\,m-1\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\frac{m}{2}}\,.\,u^{\frac{m}{2}}\,.\,v^{\frac{m}{2}} = 2\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{m\,.\,m-1\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2.\ \ldots\ldots\frac{m}{2}}$$

ist, so hat man

1) wenn m gerade

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots + \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{m.m-1..\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\frac{m}{2}}$$

2) wenn m ungerade

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}.\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots + \frac{m.m-1..\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\frac{m-1}{2}}.\cos x$$

Die andere Gleichung $2i\sin x = u - v$, oder $2^m i^m \sin^m x = (u-v)^m$ giebt

$$2^m i^m \sin^m x = u^m - m u^{m-1} v + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}u^{m-2}v^2 - + \ldots \pm v^m$$

$$2^m i^m \sin^m x = u^m - m u^{m-2} + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}u^{m-4} - + \ldots \pm v^m.$$

Da die Vorzeichen regelmässig abwechseln, und das letzte Glied für ein gerades m positiv und für ein ungerades m negativ ist, so hat man $\left(\text{weil } i^m = (i^2)^{\frac{m}{2}} = (-1)^{\frac{m}{2}}\right)$

1) für m gerade

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\,2^{m-1}\sin^m x = \cos mx - \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\cos(m-4)x - \ldots \pm \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{m.m-1.\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\frac{m}{2}}$$

2) für m ungerade*)

*) Für ein ungerades m ist nämlich das letzte Glied negativ, und da dann allgemein $u^m - v^m = 2i\sin mx$; $u^{m-2} - v^{m-2} = 2\,.\,i\sin(m-2)x$ &c.,

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}.2^{m-1}.\sin^m x = \sin mx - \frac{m}{}\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{1.2}\sin(m-4)x - .. \pm \frac{m.m-1.\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}.\sin x$$

97 a.

Da vorstehende vier Formeln für die Integralrechnung wichtig sind, so wollen wir hier gleich einige specielle Fälle zum vorkommenden Gebrauch und zum Nachschlagen daraus ableiten. Setzt man $m = 2, 3, 4, \ldots$, so erhält man

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x &= \cos 2x + 1 \\
4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x \\
8\cos^4 x &= \cos 4x + 4\cos 2x + 3 \\
16\cos^5 x &= \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x \\
32\cos^6 x &= \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10 \\
64\cos^7 x &= \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x &= -\cos 2x + 1 \\
4\sin^3 x &= -\sin 3x + 3\sin x \\
8\sin^4 x &= \cos 4x - 4\cos 2x + 3 \\
16\sin^5 x &= \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x \\
32\sin^6 x &= -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10 \\
64\sin^7 x &= -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

97 b.

Vermittelst der beiden § 96 gefundenen Gleichungen, nämlich

$$\cos mx + i\sin mx = (\cos x + i\sin x)^m$$
$$\cos mx - i\sin mx = (\cos x - i\sin x)^m$$

---

so bleibt in jedem Gliede der Factor i, und indem man auf beiden Seiten durch i dividirt, kommt auf der linken Seite der Factor $i^{m-1} = (i^2)^{\frac{m-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$.

erhält man auch leicht Formeln, nach welchen man umgekehrt die sinus und cosinus vom Vielfachen eines Bogens oder Winkels durch Potenzen dieser trigonometrischen Functionen vom einfachen Bogen oder Winkel ausdrücken kann. Man hat nämlich zuerst

$$2 \cos mx = (\cos x + i \sin x)^m + (\cos x - i \sin x)^m,$$
$$2i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m - (\cos x - i \sin x)^m.$$

Betrachten wir hier nur den Fall, wo m eine ganze Zahl ist, und entwickeln die rechten Seiten nach der Binomialformel, indem man auf die sich tilgenden Glieder und gemeinschaftlichen Factoren achtet, so verschwindet alles scheinbar Imaginäre und man erhält folgende beide endliche Reihen, deren einfaches Bildungsgesetz in die Augen springt:

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m.m-1}{1\,.\,2} \cos^{m-2} x . \sin^2 x$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cos^{m-4} x \sin^4 x - + \ldots$$

$$\sin mx = \frac{m}{1} \cos^{m-1} x . \sin x - \frac{m.m-1.m-2}{1\,.\,2\,.\,3} \cos^{m-3} x . \sin^3 x$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cos^{m-5} x . \sin^5 x - + \ldots$$

Hiernach ist z. B. für $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x . \sin^2 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x . \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$
$$\cos 6x = \cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$
$$\vdots$$

$$\sin 2x = 2 \cos x . \sin x$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 x . \sin x - \sin^3 x$$
$$\sin 4x = 4 \cos^3 x . \sin x - 4 . \cos x . \sin^3 x.$$
$$\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$$
$$\sin 6x = 5 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x$$
$$\vdots$$

Zusatz. Aus dem Anblick der allgemeinen Formeln ergiebt sich die Möglichkeit, dass man, wenn m gerade, $\cos mx$ auch durch lauter Potenzen von $\sin x$ (oder $\cos x$) und, wenn m ungerade, $\sin mx$ durch Potenzen von $\sin x$ ausdrücken könnte. Setzt man nämlich $1-\sin^2 x$ statt $\cos^2 x$, so hat man z. B.:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = -1 + 2\cos^2 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$$
$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$
$$\cos 6x = 1 - 18\sin^2 x + 48\sin^4 x - 32\sin^6 x$$
$$\vdots$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x.$$
$$\vdots$$

Ferner erhält man

$$\sin 4x = \cos x(4\sin x - 8\sin^3 x)$$
$$\sin 4x = \sin x(8\cos^3 x - 4\cos x)$$
$$\sin 6x = \cos x(6\sin x - 32\sin^3 x + 32\sin^5 x)$$
$$\sin 6x = \sin x(32\cos x - 32\cos^3 x + 6\cos x)$$

Achtes Buch.

Von den algebraischen Gleichungen.

1. Hülfssätze.

98.

Hat man irgend eine ganze Function von x, z. B.:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N,$$

wo also die Exponenten n, $n-1, \ldots$ ganze positive Zahlen, die Coefficienten A, B, C... bis M aber ganz beliebige positive, negative, ganze oder gebrochene Zahlen, 0 nicht ausgenommen, sind, N aber nicht 0 und von x befreit (N also das sogenannte absolute Glied der Gleichung) ist, so ist klar, dass für jeden endlichen positiven oder negativen reellen Werth von x auch der Betrag der ganzen Function einen endlichen reellen Werth giebt, weil nämlich jedes Glied, also auch die Summe aller, einen reellen Werth giebt. Denkt man sich ferner einen für x angenommenen reellen Werth (x_0) durch ein proportionirtes Stück auf einer Abcissenlinie abgesteckt und den zugehörigen Betrag der ganzen Function durch eine entsprechende Ordinate dargestellt, so ist auch klar, dass, wenn die Werthe von x, die Abscissen, stetig auf einander folgen, auch die entsprechenden Beträge der Function, die Ordinaten, also auch ihre Endpuncte stetig auf einander folgen und eine einzige stetige Linie bilden. Wegen dieser Eigenschaft ist also eine ganze Function von x nothwendig immer eine stetige (continuirliche).

99.

Die erwähnte Linie, welche aus einer solchen Function hervorgehen würde, kann den Umständen nach ganz oberhalb oder ganz unterhalb der Abscissenlinie oder auch zu beiden Seiten liegen, mithin dieselbe ein- oder auch mehreremal schneiden.

Die aus x^2-2x+5 entspringende Linie z. B. bleibt in ihrer unendlichen Ausdehnung nach rechts und links stets oberhalb der Abscissenlinie, weil es keinen reellen Werth von x giebt, für welchen die Function x^2-2x+5 gleich Null wird, denn setzen wir $x^2-2x+5=0$, so folgt daraus $x=1\pm2\sqrt{-1}$; diese complexen Werthe von x lassen sich aber nicht durch eine Abscisse darstellen, obgleich der Betrag der Function für diese complexen Werthe $=0$ wird. Die aus der Function x^2-x-6 entspringende Linie hingegen schneidet die Abscissenlinie zweimal und liegt also zu beiden Seiten derselben. Denn setzen wir $x^2-x-6=0$, so folgt daraus: $x=\frac{1\pm5}{2}$ &c.

100.

Aus dem vorstehenden § folgt nun, dass, wenn eine ganze Function

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N$$

für zwei reelle Werthe von x (x_0 und x_1) Resultate von entgegengesetzten Vorzeichen giebt, d. h. eine positive und eine negative Ordinate, es dann nothwendig auch (wenigstens) einen reellen Werth von x geben muss, für welchen die Function $=0$ wird. Denn die stetige Linie, welche die Function, wirklich construirt, geben, und welche durch die Endpuncte der positiven und negativen Ordinaten gehen würde, liegt theils oberhalb, theils unterhalb der Abscissenlinie und muss dieselbe also wenigstens einmal schneiden.

101.

Lehrsatz. In jeder ganzen Function

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N$$

kann man statt x immer einen so grossen Werth setzen, dass das höchste Glied (x^n) grösser wird, als die Summe aller folgenden.

1. Beweis. Diese Function lässt sich so schreiben:

$$x^n\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\ldots+\frac{M}{x^{n-1}}+\frac{N}{x^n}\right).$$

Nun kann man aber x so gross werden lassen, dass die auf 1 folgenden Brüche: $\frac{A}{x}, \frac{B}{x^2}, \ldots \frac{N}{x^n}$ so klein werden, dass ihre Summe kleiner als 1 wird; alsdann ist aber offenbar auch

$$x^n > Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N.$$

2. Beweis. Legt man in $x^n+Ax^{n-1}+\ldots+Mx+N$ allen Coefficienten A, B,...N den Werth des grössten, den wir mit G bezeichnen wollen, bei, so kann man für x einen solchen Werth angeben, dass, selbst alle Vorzeichen als gleich angenommen, doch noch

$$x^n > G(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1) \text{ oder: (Algebra § 254)}$$

$$x^n > G.\frac{x^n-1}{x-1} \text{ oder}$$

$$x^n > \frac{G.x^n}{x-1}-\frac{G}{x-1} \ldots\ldots\ldots (1)$$

und dies offenbar um so mehr, wenn

$$x^n > G.\frac{x^n}{x-1} \text{ oder}$$

$$x-1 > G, \text{ also: } x > G+1.$$

Setzt man diesen Werth von x in (1), so wird die linke Seite grösser als die rechte.

102.

Lehrsatz. In jeder ganzen Function von der Form

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}-Dx^{n-4}-Ex^{n-5}-\ldots-Mx-N,$$

in welcher nämlich ein oder mehrere unmittelbar auf einander folgende Anfangsglieder alle positiv, die darauf folgenden aber alle negativ sind, giebt es unter den unzähligen positiven Werthen, welche für x gesetzt werden können, nur einen einzigen, für welchen die Function $=0$ wird.

Beweis. Für $x=0$ giebt die Function ein negatives Resultat ($-N$). Lassen wir nun x von 0 an im positiven Sinne immerfort wachsen, so wird zuletzt x^n allein schon grösser, als die Summe aller folgenden (§. 101), mithin muss x vorher schon einen solchen positiven Werth gehabt haben, für welchen die Function $=0$ wurde (§ 100). Von da an aber bleibt bei wachsendem positiven x die Function immer positiv. Es giebt also nur einen positiven Werth von x, für welchen obige Function $=0$ wird.

103.

Lehrsatz. Wenn es in der ganzen Function

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N$$

für die unbestimmte Grösse x irgend einen Werth a giebt (er möge direct, invers, lateral oder complex sein), welcher die Function zu Null macht, so ist die Function nothwendig durch $x-a$ ohne Rest theilbar.

Nehmen wir des leichtern Verständnisses halber erst einen speciellen Fall.

Die Function $x^4-4x^3-7x^2+22x+24$ z. B. wird $=0$, wenn man $+3$ statt x setzt; dass sie nun wirklich durch $x-3$ ohne Rest theilbar ist, zeigt zuerst die wirklich ausgeführte Division, indem (Algebra § 321)

$$\frac{x^4-4x^3-7x^2+22x+24}{x-3}=x^3-x^2-10x-8.$$

Die Function $x^4-4x^3-7x^2+22x+26$ wird für $x=3$ nicht $=0$ und deshalb muss auch bei der Division derselben durch $x-3$ ein Rest bleiben. Es ist nämlich

$$\frac{x^4-4x^3-7x^2+22x+26}{x-3}=x^3-x^2-10x-8+\frac{2}{x-3}.$$

1. **Beweis.** Sei allgemein

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N \ldots\ldots\ldots (1)$$

eine beliebige ganze Function und a der Werth, welcher, statt x gesetzt, dieselbe zu Null macht, so dass also

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ma + N = 0,$$

so wird offenbar, wenn man, wie in vorstehendem Zahlenbeispiel, mit $x - a$ in $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$ dividirt, der Quotient mit x^{n-1} anheben. Bezeichnen wir die Coefficienten des Quotienten mit $A_1 : B_1 \ldots$, so hat man:

$$\frac{x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N}{x - a} = x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + B_1 x^{n-3} + \ldots + M_1 x + N_1 + \frac{R}{x - a}$$

Dass nun aber der hier fingirte und jedenfalls von x befreite Rest R nicht existirt oder $R = 0$ ist, folgt, wenn man auf beiden Seiten mit $x - a$ multiplicirt. Dann ist:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = (x - a)\left\{x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + M_1 x + N_1\right\} + R$$

Da nun beide Seiten dieser Gleichung für jeden Werth von x gleiche Resultate geben müssen, zufolge der Voraussetzung aber für $x = a$ die linke Seite $= 0$, und rechter Hand der Factor $x - a$, als auch das Product aus ihm und dem andern eingeklammerten Factor $= 0$ wird, so hat man, a statt x gesetzt:

$$0 = 0 + R, \text{ mithin } R = 0.$$

Dieser Beweis ist von d'Alembert, der folgende von Lagrange.

2. **Beweis.** Aus der Voraussetzung:

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \ldots + Ma + N = 0$$

$$\text{folgt: } N = -a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} - \ldots - Ma.$$

Setzt man diesen Ausdruck für N in die Function (1), so wird sie

$$x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx - a^n - Aa^{n-1} - \ldots - Ma$$

$$\text{oder: } x^n - a^n + A(x^{n-1} - a^{n-1}) + B(x^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + M(x - a),$$

und es ist aus dieser Form nun klar, dass die fragliche Function (1), was auch a zein möge, durch $x-a$ ohne Rest theilbar ist. (Algebra § 321, 2.)

104.

Bildet man durch gewöhnliche Multiplication aus einfachen zweitheiligen Factoren (Formen ersten Grades) ein Product, so is klar, dass das Product durch jeden der Factoren ohne Rest theilbar sein muss. Es ist z. B.

$$(x-1)(x-3)(x+2)=x^3-2x^2-5x+6 \ldots\ldots (1)$$

und das Product rechter Hand muss durch $x-1$, durch $x-3$ und durch $x+2$ ohne Rest theilbar sein.

Weil ferner, wenn man in die Gleichung (1) für x beliebige Werthe setzt, auf beiden Seiten geiche Resultate kommen müssen, linker Hand aber jedesmal einer der Faktoren $=0$ wird, wenn man statt x die Zahlen 1, 3 und -2 setzt, so muss für jeden dieser drei Werthe von x auch das Product rechter Hand $=0$ werden, und es ist klar, dass für jeden andern Werth von x keiner der drei Factoren, also auch nicht das Product, $=0$ wird.

105.

Aus Formen ersten Grades, $x-a$, $x-b$, $x-c$ &c., lässt sich durch gemeine Multiplication oder durch Variation das entsprechende Product entwickeln, und es ist einleuchtend, dass, wenn man n einfache Factoren, $x-a$, $x-$b &c. hat, das Product eine ganze Function vom $n$ten Grade sein wird; wichtiger ist nun aber die umgekehrte Frage: ob man wohl jede ganze Function vom $n$ten Grade als ein aus Formen ersten Grades gebildetes Product betrachten darf und in solche zerlegen kann, Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Theorie der höheren algebraischen Gleichungen ab.

106.

Schon in der Algebra (§ 218) ist erklärt, dass in einer Gleichung mit nur einer unbekannten Grösse jede statt der

unbekannten gesetzte positive, negative, laterale oder complexe Grösse, welche der Gleichung Genüge leistet (d. h. die linke Seite gleich der rechten macht), eine W u r z e l derselben genannt wird. Kommen in einer Gleichung nur ganze positive Potenzen der unbekannten Grösse vor und ist die endliche Zahl n der höchste Exponent, so heisst sie eine a l g e b r a i s c h e Gleichung vom $n$ten Grade (s. die Anmerkung zu § 34) und lässt sich, wenn man alle Glieder auf die linke Seite bringt, immer so formen:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + Mx + N = 0,$$

so dass nämlich die linke Seite immer eine ganze Function ist.

Sind alle Potenzen der unbekannten Grösse von der $n$ten bis zur 1ten darin enthalten, so heisst die Gleichung vollständig, sonst unvollständig.

107.

Die vorhin aufgeworfene Frage, ob sich jede ganze Function vom $n$ten Grade, oder, was dasselbe ist, die linke Seite einer geordneten algebraischen Gleichung $n$ten Grades von obiger Form immer in n einfache Factoren auflösen lässt, kommt darauf zurück, ob es für j e d e algebraische Gleichung i m m e r einen Werth a giebt, welcher, statt der unbestimmten Grösse x gesetzt, derselben Genüge leistet; denn wäre dies der Fall, so könnte man, wie in § 103 bewiesen, die linke Seite $x^n + Ax^{n-1} + \dots + Mx + N$ durch $x - a$ ohne Rest dividiren und mithin dieselbe in z w e i Factoren auflösen, wovon der eine einfach $(x - a)$ und der andere ein Quotient von der Form

$$x^{n-1} + A_1x^{n-2} + \dots + M_1x + N_1$$

wäre. Von dem erhaltenen, um einen Grad niedrigern Quotienten gälte dann dasselbe wieder. Denn wäre b die Grösse, welche, statt x gesetzt, den Quotienten zu Null macht, so könnte man ihn wieder durch $x - b$ ohne Rest dividiren und mithin in das Product $(x-b)\,(x^{n-2} + A_2x^{n-3} + \dots + M_2x + N_2)$ auflösen &c.

Liesse sich also beweisen, dass für jede (geordnete) algebraische Gleichung immer ein Werth existirt, welcher,

statt der Unbekannten x gesetzt, derselben Genüge leistet, so wäre man auch zu dem Schlusse berechtigt, jede Gleichung vom $n$ten Grade als ein Product aus n einfachen Factoren und zwar als das Product der sämmtlichen n annullirten Wurzelgleichungen betrachten zu dürfen.

Diese n einfachen Factoren könnten dann, den Umständen nach, zum Theil oder auch alle reelle, imaginäre oder complexe Grössen, zum Theil oder auch alle verschieden oder auch gleich sein; im letztern Falle sagt man, die Gleichung habe n gleiche Wurzeln.

So hat z. B. die Gleichung dritten Grades $x^3-2x^2-5x+6=0$ drei reelle Wurzeln, zwei positive, 1 und 3, und eine negative, -2, denn sie ist das Product aus $(x-1)(x-3)(x+2)$, und die drei Werthe $1, 3, -2$ leisten ihre Genüge.

Die Gleichung $x^3-3x^2+4=0$ hat drei reelle Wurzeln, worunter zwei gleiche. Sie ist das Product aus $(x-2)(x-2)(x+1)$.

Die Gleichung: $x^2-2x+5=0$ hat zwei complexe Wurzeln, sie ist das Product aus $(x-1+2\sqrt{-1})(x-1-2\sqrt{-1})$.

108.

*Dass nun aber jede algebraische Gleichung $n$ten Grades wirklich eine und folglich n Wurzeln habe (sich in n Factoren ersten Grades zerlegen lässt), dafür giebt es verschiedene Beweise, von welchen wir hier den einfachsten Ullherr'schen (im Crelle'schen Journal) erläutern wollen. Dieser Beweis zeigt nämlich, dass es für jede ganze, in Bezug auf x rationale Function

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N \ldots\ldots (1)$$

immer einen Werth $p+qi$ giebt, welcher statt x gesetzt die Function (1) annullirt.*)

Was auch p und q für Werthe haben mögen (Null nicht ausgenommen), so können wir doch, zufolge § 83, immer $p=\varrho.\cos\varphi$ und $q=\varrho.\sin\varphi$, mithin $p+qi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ setzen.

*) Wir nehmen hier die Coefficienten A, B, ... N alle als reelle Grössen an, weil dies vermöge § 112, Beweis 2, genügt. Vermöge §§ 113 und 114 brauchte dieser Beweis nur für den speciellen Fall geführt zu werden, wo n eine gerade Zahl und N positiv ist.

Substituiren wir nun diesen bequemern Ausdruck statt x in (1), so verwandelt sich die Function in:

$$\varrho^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + \begin{Bmatrix} A\varrho^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1} + \\ B\varrho^{n-2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-2} + \\ \vdots \\ + M\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{Bmatrix} + N$$

mithin auch, zufolge der Moivre'schen Formel (§ 88), in

$$\varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + \begin{Bmatrix} A\varrho^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi] \\ B\varrho^{n-2}[\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi] \\ \vdots \\ M\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi \end{Bmatrix} + N \ldots (2)$$

Um nun anschaulich zu machen, dass es für ϱ und φ Werthe geben muss, welche den Ausdruck (2) annulliren, wollen wir denselben, wie in § 82 gezeigt, bildlich darstellen, indem wir ϱ und φ als veränderlich annehmen. Aus der unbegrenzten Zahlenebene, in welcher wir die fraglichen Werthe von x, nämlich $p+qi$ oder ϱ $(\cos.\varphi + i\sin\varphi)$ zu suchen haben, können wir nun ein endliches begrenztes Stück ausscheiden, über welches hinaus sich ϱ^n jedenfalls nicht erstrecken kann, indem wir nämlich für ϱ^n zuerst einen so grossen Werth annehmen, dass

$$\varrho^n > A\varrho^{n-1} + B\varrho^{n-2} + \ldots + M\varrho + N \ldots\ldots (3)$$

was nach § 101 immer möglich ist.

Beschreiben wir nun mit $\varrho^n = OA$ einen Kreis um den Nullpunct O, so muss die erste complexe Grösse in (2), nämlich: ϱ^n $(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, für sich allein dargestellt, für jeden Werth von φ, Puncte der Zahlenebene geben, welche alle auf die Peripherie dieses Kreises fallen, weil ja der Modulus dieser complexen Grösse für jedes φ immer $= \varrho^n$ ist, nämlich $\sqrt{(\varrho^{2n}\cos^2 n\varphi + \varrho^{2n}\sin^2 n\varphi)} = \varrho^n$ (§ 85, Anmerkung).

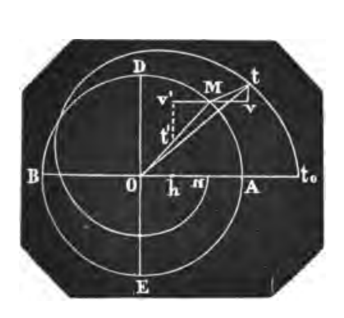
Denken wir uns für φ alle stetig auf einander folgenden Werthe von 0^0 bis $\frac{360^0}{n}$ gesetzt, so ist zuerst für $\varphi = 0$, der Betrag der ersten complexen Grösse in (2), $= \varrho^n$ (Punct A).

Bezeichnen wir die Summe aller folgenden Glieder mit $\alpha + \beta i$, indem wir der Kürze halber:

$$A\varrho^{n-1}.\cos(n-1)\varphi + B\varrho^{n-2}.\cos(n-2)\varphi + \ldots + M\varrho\cos\varphi + N = \alpha \ldots (4)$$
$$A\varrho^{n-1}.\sin(n-1)\varphi + B\varrho^{n-2}.\sin(n-2)\varphi + \ldots + M\varrho\sin\varphi = \beta \ldots\ldots (5)$$

setzen, so ist für $\varphi = 0$, der ganze Betrag der Function (2), $= \varrho^n + \alpha$ (indem nach (5) für $\varphi = 0$ auch $\beta = 0$). Weil nun $\varrho^n > \alpha$,*) so ist auch, selbst wenn α negativ wäre, $\varrho^n + \alpha > 0$. Der Punct t_0 der Zahlenebene, welcher, für $\varphi = 0$, den ganzen Betrag der Function (2) darstellt, fällt nothwendig rechts von DE und zwar zwischen O und A, wenn α negativ, und über A hinaus, wenn, wie in der Figur angenommen, α ($= At_0$) positiv ist.

Für $\varphi = \frac{90^0}{n}$, also $n\varphi = 90^0 = \angle DOA$, ist in (2) der Betrag des ersten complexen Gliedes $= \varrho^n . i$ (Punkt D) und, indem wir die Summe aller folgenden Glieder für diesen Werth von φ wieder mit $\alpha + \beta i$ bezeichnen und, wie in § 89 a gezeigt, dem ersten Gliede hinzufügen, ist der ganze Betrag der Function (2) $= \alpha + (\varrho^n + \beta)\, i$, mithin, wenn β auch negativ wäre, doch $\varrho^n + \beta > 0$ und der fragliche Punct der Zahlenebene fällt nothwendig oberhalb des Durchmessers AB (und, je nachdem α positiv oder negativ ist, rechts oder links von DE).



Für $\varphi = \frac{180^0}{n}$, also $n\varphi = 180^0$, ist der Betrag des ersten complexen Gliedes $= \varrho^n \cos 180^0 = -\varrho^n$ (Punct B) und, indem wir die Summe der folgenden Glieder wieder mit $\alpha + \beta i$ bezeichnen, der ganze Betrag der Function (2)

*) Wenn man Glieder rechter Hand in der Ungleichung (3) mit den cosinus oder sinus beliebiger Winkel multiplicirt, so muss die Ungleichung bestehen bleiben, weil ja alle cosinus und sinus echte Brüche oder höchstens = 1 sind.

$=(-\varrho^n+\alpha)+\beta i$. Der ihn darstellende Punct der Zahlenebene fällt nun links von D E, weil die reelle Grösse $(-\varrho^n+\alpha)$, wegen $\varrho^n > \alpha$, jedenfalls negativ ist.

Für $\varphi = \frac{270^0}{n}$, also $n\varphi = 270^0$ ist $i\varrho^n \sin 270^0 = -\varrho^n . i$. Der fragliche Punct fällt unterhalb A B, weil jetzt der Factor von i, nämlich: $-\varrho^n+\beta$ (wegen $\varrho^n > \beta$), negativ ist.

Für $\varphi = \frac{360^0}{n}$, also $n\varphi = 360^0$ ist der ganze Betrag der Function (2) $= (\varrho^n+\alpha)+\beta i$. Der fragliche Punct fällt jetzt wieder rechts von D E (und, je nachdem β positiv oder negativ ist, oberhalb oder unterhalb A B).

Es ist nun einleuchtend, dass für die Annahme eines so grossen Werthes von ϱ, für welchen die Ungleichung (3) besteht, für keinen Werth von φ der fragliche Punct t mit dem Nullpunct 0 zusammenfallen kann, weil der Modulus des ersten complexen Gliedes stets grösser ist, als der Modulus von der Summe aller folgenden Glieder ($\varrho^n > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, § 89 a, Zusatz).*)

Die in (4) und (5) durch α und β vertretenen Ausdrücke ändern sich stetig mit dem Winkel φ, so dass, wenn φ sich um eine sehr kleine Grösse ändert, sich nothwendig α und β auch nur um sehr kleine Grössen ändern. Deshalb müssen die erwähnten Puncte $t_0, t_1, \ldots$ stetig auf einander folgen und in einer gewissen krummen Linie den Nullpunct umschlingen.**)

*) Wenn auch für irgend einen Punct M, welcher den Betrag des ersten complexen Gliedes in (2) darstellt, α und β, statt positiv, wie hier in der Figur angenommen, ($Mv=\alpha$, $vt=\beta$) beide negativ (Mv', $v'\,t'$) und so beschaffen wären, dass der Modulus $t'M=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ gerade auf den Modulus $OM=\varrho^n$ fiele, so würde der Punct t' doch den Nullpunct 0 nicht erreichen, weil $\varrho > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

**) Wollte man φ noch weiter wachsen lassen, z. B. von $\frac{360^0}{n}$ bis $\frac{2.360^0}{n}$, also $n\varphi$ von 360^0 bis 2.360^0, so erhält man noch eine Windung, und für $\varphi=0$ bis $\varphi=360^0$, also von $n\varphi=0$ bis $n\varphi=n.360^0$ im Ganzen n Windungen, die aus angegebenem Grunde ($\varrho^n > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$) alle um den

Lassen wir nun ϱ stetig bis zu Null abnehmen, und denken uns für jeden Modulus von $\varrho^n = OA$ bis $\varrho^n = 0$ die Construction des ganzen Ausdrucks (2) ausgeführt, so wird offenbar die ganze Kreisfläche ADBE mit concentrischen, sich stetig an einander legenden Peripherien ganz ausgefüllt. Gleichzeitig müssen auch die diesen unzähligen Peripherien entsprechenden Windungen sich stetig an einander legen. Und diese Windungen, die anfangs den Nullpunct O umschlangen, müssen für sehr kleine ϱ ganz ausserhalb desselben liegen. Denn setzt man $\varrho = 0$, so reducirt sich der ganze Ausdruck (2) auf das letzte constante Glied N, und dies giebt, construirt, einen Punct h, der ausserhalb des Nullpuncts O auf AB fällt, und zwar rechts oder links von DE, je nachdem N positiv oder negativ ist.

Nun kann man sich aber ϱ, also auch den Modulus ϱ^n, so klein denken, dass in (2) die constante Grösse N grösser bleibt, als die Summe aller vorhergehenden reellen Glieder. Die diesem ϱ^n entsprechende kleine Windung (indem man für φ wieder alle Werthe von 0 bis $\frac{360^0}{n}$ gesetzt denkt) wird jetzt nicht den Nullpunct O, sondern den für $\varrho = 0$ entsprechenden Punct h umschlingen. Es muss also nothwendig zwischen $\varrho^n = OA$ und $\varrho^n = 0$ ein solcher Modulus ϱ^n existiren, für welchen die Windung den Nullpunct weder umschlingt, noch ganz ausserhalb desselben liegt, sondern durch denselben hindurchgeht. Ueberdies ist auch klar, dass alle Puncte des von der ersten Windung $t_0\ tn$ und der geraden Linie nt_0 begrenzten Stücks der Zahlenebene, mithin auch der Nullpunct O zum Vorschein kommen müssen, und hiermit ist nun bewiesen, dass es für ϱ und φ solche Werthe giebt, welche den Ausdruck (2) zu Null machen, folglich auch, weil wir $\varrho\ (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Nullpunct O herumgehen. Die in der Figur nur angedeutete Eine Windung entspricht der bekannten Function:

$$81\ (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) + 54 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + 5,$$

welche aus der Gleichung: $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ entspringt, wenn man darin $x = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und dann $\varrho = 3$ setzt.

statt $p + qi$ substituirt haben, dass für x wenigstens ein Werth von der Form $p + qi$ (wo jedoch p oder q auch $= 0$ sein kann) existirt, welcher die Function (1) annullirt, mit andern Worten: jede rationale algebraische Gleichung $n$ten Grades hat eine Wurzel und mithin n Wurzeln (§ 107).

109.

Ueber die nicht leichte Theorie der höhern Gleichungen haben sich die Mathematiker von je her sehr viel den Kopf zerbrochen. Je näher man ihr auf die Spur gekommen zu sein glaubt, sagt Montucla, je tiefer verkriecht sie sich. Die Lösung der gemischten quadratischen Gleichungen erforderte schon einen kleinen Kunstgriff. Mit den höhern Graden aber steigern sich auch die Schwierigkeiten, und obgleich die grössten Analysten sich angestrengt haben, diese sich thürmenden Schwierigkeiten zu überwinden, so ist doch bis jetzt, was die Hauptsache, nämlich die Auflösung der höhern Gleichungen, d. i. die Auffindung ihrer Wurzeln betrifft, das erwünschte Ziel noch nicht erreicht, jedoch sind mehrere schon an sich merkwürdige Sätze aufgefunden worden, welche vielleicht dazu beitragen können, an dies Ziel zu gelangen. Die wichtigsten dieser Sätze, zu welchen die vorhergehenden die Grundlage bilden, wollen wir im Folgenden mittheilen.

2. Eigenschaften.

110.

Bildet man aus n einfachen Factoren $x - a_1$, $x - a_2 \ldots x - a_n$, das Product $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N$, so sind die Coefficienten A, B...N des Products im Voraus durch die Grössen a_1, $a_2 \ldots$ bestimmt. Mit andern Worten: die Coefficienten in einer algebraischen Gleichung sind Functionen von den Wurzeln. Es sollen nun diese Functionen, d. h. die Beziehungen, welche unter den Coefficienten einer Gleichung und ihren Wurzeln stattfinden, gefunden werden.

Man denke sich zu dem Ende die n einfachen Factoren, wie angedeutet, unter einander gestellt, die Zeiger 1, 2 eingeführt, und das Product nach § 26 durch Variation gebildet, so ist leicht einzusehen, dass, weil der Zeiger 1, an welcher Stelle er auch stehen möge, immer x bedeutet, der Zeiger aber in der letzten Stelle a_1, in der vorletzten a_2 &c. vertritt, und jede Variationsform immer n Factoren enthält, die erste: 1111...111, $= x^n$ ist. Die zweite Variationsform ist 1111...112, $= a_1 x^{n-1}$. Da nun aber der Zeiger 2 an allen n Stellen zu stehen kommt, so braucht man die ihn enthaltenden Variationsformen nicht alle zu bilden. Man kann dieselben jetzt auf kürzerm Wege erhalten. Die Summe der Coefficienten von x^{n-1} oder der Coefficient A ist offenbar gleich der Summe der Combinationen aus $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$ zur ersten Classe, d. i. gleich der Summe aller Wurzeln, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Denn wären z. B., wie hier angenommen, alle Wurzeln positiv, so kommen sie in den einfachen zweitheiligen Factoren $x - a_1$, $x - a_2$ &c. alle mit dem Minuszeichen vor und umgekehrt. Dasselbe gilt offenbar auch, wenn die Wurzeln theils positiv, theils negativ sind. Da ferner aus der Variationsform 1111...122, $= a_1\ a_2 x^{n-2}$ alle übrigen, in welchen der Zeiger 2 an zwei Stellen vorkommt, hervorgehen, indem man diese Form permutirt denkt, wodurch offenbar der Zeiger 2 oder die Elemente $a_1\ a_2 \ldots a_n$ in allen möglichen Combinationen zur zweiten Classe zum Vorschein kämen, so ist offenbar die Summe der Coefficienten von x^{n-2}, d. i. der Coefficient B, gleich der Summe der Combinationen aller

$$\begin{array}{cc} \overset{1}{\smile} & \overset{2}{\smile} \\ x & -\ a_n \\ x & -\ a_{n-1} \\ \vdots & \\ x & -\ a_4 \\ x & -\ a_3 \\ x & -\ a_2 \\ x & -\ a_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1111\ldots111, = x^n \\ 1111\ldots112, = a_1 x^{n-1} \\ 1111\ldots121, = a_2 x^{n-1} \\ 1111\ldots122, = a_1 a_2 x^{n-2} \\ 1111\ldots211, = a_3 x^{n-1} \\ 1111\ldots212, = a_1 a_3 x^{n-2} \\ \vdots \\ 2111\ldots111, = a_n x^{n-1} \\ 2111\ldots112, = a_1 a_n x^{n-2} \\ 2111\ldots121 \\ 2111\ldots122 \\ \vdots \\ 2222\ldots222, = a_1\ a_2 \ldots a^n \end{array}$$

Wurzeln zur zweiten Classe, und zwar mit demselben Vorzeichen. Denn welche Vorzeichen die Wurzeln auch haben mögen, so wird das Product aus je zwei, mit demselben oder umgekehrten Vorzeichen, doch dasselbe; z. B. $a_1 . a_2 = (-a_1)(-a_2)$; $a_1 . (-a_2) = -a_1 . (a_2)$ &c.

Eben so ist nun wohl einleuchtend, dass die Summe der Coefficienten von x^{n-3}, d. i. C, gleich ist der Summe aller Combinationen der Wurzeln $a_1\ a_2 \ldots a_n$ zur 3ten Classe, aber mit umgekehrten Vorzeichen. Denn wären alle Wurzeln + oder alle —, so würde offenbar das Product aus je drei das umgekehrte Vorzeichen haben. Dasselbe gilt auch, wenn die Wurzeln verschiedene Vorzeichen haben. Denn wären z. B. drei Wurzeln $+a$, $-b$, $-c$, so wäre das Product $+abc$. Weil aber in den einfachen zweitheiligen Factoren der Gleichung die Vorzeichen der Wurzeln entgegengesetzt sind, $x-a$, $x+b$, $x+c$, so muss sich im Product auch das Vorzeichen von $+abc$ umkehren &c. Das letzte Glied N ist demnach das Product aus allen Wurzeln mit demselben oder umgekehrten Vorzeichen, je nachdem dieses letzte Glied ungerade oder gerade ist. In Zeichen: es ist in

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Mx + N = 0,$$

wenn $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$ die Wurzeln bedeuten, allemal

$$\begin{aligned} A &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = -\overset{1}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n), \\ B &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n = +\overset{2}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n), \\ C &= -(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots) = -\overset{3}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n), \\ &\vdots \\ N &= (-1)^n (a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n) = (-1)^n \overset{n}{C}(a_1\, a_2 \ldots a_n). \end{aligned}$$

Zusatz. Aus Vorstehendem folgt, dass, wenn in einer Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Mx + N = 0$ das zweite Glied fehlt, also $A = 0$ ist, dann die Summe aller Wurzeln auch $= 0$ ist. Fehlte das dritte Glied, also $B = 0$, so wäre die Summe der Producte aus je zwei der Wurzeln $= 0$ &c.

Bilden wir z. B. aus den drei Wurzeln $+1$, $+2$ und -3 die entsprechende Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0,$$

so fehlt in dieser unvollständigen Gleichung dritten Grades das zweite Glied, weil die Summe der Wurzeln $1+2-3=0$ ist. Die Summe der Producte aus je zwei mit demselben Vorzeichen genommen ist $1.2-1.3-2.3=-7$. Das Product aus allen drei mit umgekehrten Vorzeichen genommen ist $=-1.2.(-3)=+6$.

111.

Bezeichnet man die Summe der $n$ten Potenzen der Wurzeln mit S_n, z. B. $a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=S_4$, so ist (s. § 110.)

$$S_1=a_1+a_2+\ldots+a_n=-A, \text{ oder}$$
$$S_1+A=0\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ferner:

$$[-(a_1+a_2+\ldots+a_n)]^2=A^2 \text{ oder}$$
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots)=A^2, \text{ d. i.}$$
$$S_2+2B-A^2=0 \text{ oder}$$
$$S_2+A(-A)+2B=0 \text{ oder}$$
$$S_2+AS_1+2B=0\ldots. (2)$$

In gleicher Weise findet man

$$\left.\begin{array}{l} S_3+AS_2+BS_1+3C=0 \\ S_4+AS_3+BS_2+CS_1+4D=0 \end{array}\right\} (3).$$

Hieraus ergiebt sich zugleich

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=-A,$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=A^2-2B,$$
$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots+a_n^3=-A^3+3AB-3C,$$
$$a_1^4+a_2^4+a_3^4+\ldots+a_n^4=A^4-4A^2B+4AC+2B^2-4D.$$

112.

Lehrsatz. Wenn eine Gleichung mit reellen Coefficienten

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N=0$$

eine imaginäre Wurzel von der Form $\alpha+\beta i$ hat, so hat sie nothwendig auch noch eine zweite, die sogenannte conjugirte Wurzel von der Form $\alpha-\beta i$.

1. Beweis. Ist $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so ist $x - \alpha - \beta i$ einer der n einfachen Factoren. Da nun die Coefficienten A, B...N reelle Grössen sein sollen, so muss sich unter den n einfachen Factoren der Gleichung nothwendig noch ein zweiter Factor von der Form $x - \alpha + \beta i$ befinden; denn nur der Factor $x - \alpha + \beta i$ giebt, mit $x - \alpha - \beta$ multiplicirt, ein reelles Product. Es ist nämlich:

$$(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

2. Beweis. Ist $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so kommt, wenn man diese Grösse statt x substituirt, ein Resultat von der Form $T + Ui$, und es ist klar, dass alle geraden Potenzen von βi, weil reell, in T, und alle ungeraden Potenzen von βi in Ui enthalten sind. Setzt man $\alpha - \beta i$ statt x, so muss, weil die geraden Potenzen von $-\beta i$ dieselben wie von $+\beta i$, die ungeraden Potenzen von $+\beta i$ und $-\beta i$ aber entgegengesetzt sind, offenbar das Resultat der Substitution $= T - Ui$ sein, mithin, wenn $\alpha + \beta i$ eine Wurzel, also $T = 0$, $U = 0$ ist, so ist auch $\alpha - \beta i$ eine Wurzel.

Wenn also eine Gleichung mit reellen Coefficienten imaginäre Wurzeln hat, so sind sie immer gepaart vorhanden.

Hat man also eine solche Wurzel $\alpha + \beta i$ nachgewiesen, so kann man die linke Seite gleich durch $(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ dividiren. In dem entstehenden Quotienten: $x^{n-2} + A_2 x^{n-3} + \ldots + N_2$ sind die Coefficienten wieder reelle Grössen. (Vergl. Randanmerkung § 108.)

113.

Lehrsatz. Eine Gleichung von unpaarem (ungeradem) Grade hat wenigstens eine reelle Wurzel, und zwar eine positive oder negative, je nachdem das letzte Glied negativ oder positiv ist.

Beweis. Man denke sich die linke Seite construirt. Setzt man $x = 0$, so giebt das letzte Glied N die Ordinate. Nun kann man für x einen so grossen Werth $\pm a$ gesetzt denken, dass das erste Glied grösser wird, als die Summe aller folgenden,

und das entgegengesetzte Vorzeichen von N hat &c. (§ 100). So hat z. B. die Gleichung:

$$x^5 + 3x^2 + 2x + 7 = 0$$

wenigstens eine reelle (negative) Wurzel. Denn setzt man $x = 0$, so ist der Betrag der linken Seite $= + 7$, und setzt man x nur $= - 2$, so ist der Betrag der linken Seite $= - 17$ &c. (§ 100).

114.

Lehrsatz. Eine Gleichung von paarem Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

Beweis. Sei die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + \ldots + Mx - N = 0.$$

Denkt man sich die linke Seite construirt und setzt $x = 0$, so erhält man eine negative Ordinate, $-$ N. Setzt man hierauf für x eine hinreichend grosse positive und auch negative Zahl $\pm a$, so wird $(\pm a)^{2m}$ positiv und grösser als die Summe aller folgenden Glieder, wenn auch alle negativ wären. Man hat also rechts und links der negativen Ordinate $-$ N noch eine positive Ordinate, und die Linie, welche durch die Endpuncte aller drei Ordinaten geht, muss die Abscissenlinie wenigstens zweimal schneiden. (§ 100.)

115.

Lehrsatz. Ist eine Gleichung von paarem Grade und ihr letztes Glied positiv, so können alle ihre Wurzeln imaginär sein.

Beweis. Aus § 112 1stem Beweis folgt, dass, wenn alle Wurzeln einer Gleichung imaginär, folglich auch gepaart sind, das letzte Glied, nämlich das Product, aus den gepaarten imaginären Wurzeln immer positiv ist. (§ 110.)

116.

Lehrsatz. Wenn die Wurzeln einer Gleichung alle reell und ganze Zahlen sind, so sind die Coefficienten der Gleichung

nothwendig auch ganze Zahlen, und die Wurzeln sind in diesem seltenen Falle leicht zu finden, indem man das letzte Glied in Factoren zerlegt, dann diese Factoren, sowohl positiv als negativ genommen, statt x substituirt und zusieht, welche von ihnen der Gleichung Genüge leisten.

Beweis. Dies folgt aus der Bildung der Gleichung § 110, wornach das letzte Glied = dem Product aus allen Wurzeln multiplicirt mit $(-1)^n$ ist.

117.

Lehrsatz. Sind in einer Gleichung alle Coefficienten ganze Zahlen, so sind die etwaigen reellen Wurzeln, wenn sie keine ganze Zahlen sind, nothwendig irrational.

Beweis. Angenommen: es sei ein echter oder unechter Bruch $\frac{a}{b}$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0,$$

mithin
$$\frac{a^n}{b^n} + A\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + B\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \ldots + M\frac{a}{b} + N = 0.$$

Dass nun aber diese letzte Gleichung nicht möglich ist, leuchtet ein, wenn man mit b^{n-1} multiplicirt; denn dann hätte man

$$\frac{a^n}{b} + Aa^{n-1} + Ba^{n-2}b + \ldots + Mab^{n-2} + Nb^{n-1} = 0.$$

Da aber das erste Glied $\frac{a^n}{b}$ keine ganze Zahl sein kann (Algebra § 316), alle darauf folgenden aber nach der Voraussetzung ganze Zahlen sind, so ist klar, dass der Betrag aller Glieder nicht = 0 sein kann.

Die Gleichung $x^5 - 10x^2 - 10x - 6 = 0$ z. B. hat eine Wurzel $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Die Gleichung $x^6 - 6x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 12x - 2 = 0$ hat eine Wurzel $x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$.

118.

Den vorhergehenden §§ fügen wir noch folgende sich von selbst verstehende Sätze ohne Beweis hinzu:

1) Wenn alle Glieder einer Gleichung das + Zeichen haben, so hat eine solche Gleichung keine positive Wurzeln (§ 110).

2) Wenn alle Wurzeln einer Gleichung reell und negativ sind, so ist die Gleichung nothwendig vollständig, und alle Glieder sind positiv.

3) Wenn eine Gleichung lauter gerade Potenzen der unbekannten Grösse enthält, so sind die Wurzeln paarweise gleich, aber entgegengesetzt. Denn wenn $+a$ der Gleichung Genüge leistet, so muss auch, der geraden Potenzen halber, $-a$ derselben Genüge leisten.

3. Umformung der Gleichungen.

119.

Um aus einer Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0 \ldots\ldots (1)$$

eine andere abzuleiten, deren Wurzeln sämmtlich um eine bestimmte Grösse, h, grösser sind, setze man $y-h$ statt x, so erhält man die neue Gleichung

$$(y-h)^n + A(y-h)^{n-1} + B(y-h)^{n-2} + \ldots + M(y-h) + N = 0 \ldots (2)$$

und es ist klar, dass, wenn irgend ein Werth a, statt x gesetzt, der Gleichung (1) Genüge leistet, dann der Werth $a+h$, statt y gesetzt, der Gleichung (2) Genüge leistet.

Umgekehrt werden alle Wurzeln der Gleichung (1) um die beliebige Grösse h kleiner, wenn man $y+h$ statt x substituirt.

Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sollen alle um 1 verkleinert werden.

Setzt man $y+1$ statt x, so hat man

$$(y+1)^3 - 2(y+1)^2 - 9(y+1) + 18 = 0,$$

oder entwickelt

$$y^3 + y^2 - 10y + 8 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Gleichung (3) hat die Wurzeln 2, 3, —3; die Gleichung (4) aber die Wurzeln 1, 2, —4.

120.

Vorstehender Satz kann benutzt werden, um aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, in welcher das zweite Glied fehlt. Soll z. B. aus der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

eine andere abgeleitet werden, in welcher das zweite Glied fehlt, so setze man vorläufig $y+h$ statt x, entwickele und ordne, so kommt

$$y^3 + (3h-2).y^2 + (3h^2-4h-9).y + (h^3-2h^2-9h+18) = 0 \ldots (2)$$

Damit nun das zweite Glied, $(3h-2)y^2$, herausfällt, nehme man h so, dass $3h-2=0$, mithin $h=\frac{2}{3}$, so erhält man die Gleichung

$$y^3 - \frac{31}{3}y + \frac{308}{27} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

In dieser vom zweiten Gliede befreiten Gleichung (3) sind die Wurzeln um $\frac{2}{3}$ kleiner, als in der Gleichung (1).

Allgemein, um aus der Gleichung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

eine andere abzuleiten, in welcher das zweite Glied fehlt, muss man $y - \frac{A}{n}$ statt x substituiren. Denn setzt man $y+h$ statt x, so hat man

$$(y+h)^n + A(y+h)^{n-1} + B(y+h)^{n-2} + \ldots + M(y+h) + N = 0,$$

oder entwickelt

$$y^n + (nh+A).y^{n-1} + \left\{\frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}h^2 + (n-1)h.A + B\right\}.y^{n-2} + \ldots\ldots = 0.$$

Damit das zweite Glied herausfällt, muss $nh + A = 0$, mithin $h = -\frac{A}{n}$ sein. Wollte man das dritte Glied fortschaffen, so

hätte man, um h zu bestimmen, eine quadratische, und um das vierte Glied fortzuschaffen, eine cubische Gleichung zu lösen &c.

Anmerkung. Um in der Gleichung $x^3 + Ax^2 + B = 0$ das zweite Glied zu beseitigen, setzt man einfacher $x = \frac{1}{y}$; denn dann entsteht $\frac{1}{y^3} + \frac{A}{y^2} + B = 0$, oder $y^3 + \frac{Ay}{B} + \frac{1}{B} = 0$.

121 a.

Um aus einer Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

eine andere abzuleiten, deren Wurzeln h mal so gross sind, setze man $\frac{y}{h}$ statt x. Diese Umformung könnte benutzt werden, wenn mehrere Wurzeln sehr nahe gleich sind, indem man durch hinreichende Vervielfachung der Wurzeln dieselben weiter aus einander bringen kann, so wie auch, um aus einer Gleichung, deren Coefficienten Brüche sind, eine andere abzuleiten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Man braucht zu diesem letztern Zwecke nur h so zu nehmen, dass die Nenner verschwinden, wenn der erste Coefficient mit h, der zweite mit h^2, der dritte mit h^3 u. s. w. multiplicirt wird. Soll z. B. aus der Gleichung

$$x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6} = 0 \ldots\ldots (1)$$

eine andere abgeleitet werden, in welcher die Coefficienten ganze Zahlen sind, so substituire man $\frac{y}{6}$ statt x, so kommt

$$\frac{y^5}{6^5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{y^4}{6^4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{6^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{6} + \frac{5}{6} = 0,$$

$$\text{oder } y^5 - 4y^4 + 54y^2 - 648y + 6480 = 0.$$

In dieser Gleichung mit ganzen Coefficienten sind alle Wurzeln 6mal so gross, als die der Gleichung (1).

121 b.

Um die Wurzeln einer Gleichung h mal so klein werden zu lassen, setze man $x = hy$. Durch diese Umformung lassen sich die Coefficienten in kleinere verwandeln. Ist z. B. $x^3 - 112x - 128 = 0$ gegeben, so setze $x = 4y$ und es entsteht

$$4^3 . y^3 - 112 . 4y - 128 = 0, \text{ oder}$$
$$y^3 - 7y - 2 = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle Wurzeln 4 mal so klein als in der gegebenen.

122.

Um aus einer Gleichung eine andere mit gerade entgegengesetzten Wurzeln abzuleiten, setze man $-x$ statt x. Die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

hat die drei Wurzeln 2, 3, -3. Die Gleichung:

$$(-x)^3 - 2(-x)^2 - 9(-x) + 18 = 0$$
$$\text{oder } x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

hat die Wurzeln -2, -3, $+3$.

123.

Um aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die reciproken Werthe der erstern sind, substituire man $\frac{1}{y}$ statt x. Die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

enthält die Wurzeln 2, 3, -3. Setzt man $\frac{1}{y}$ statt x, so kommt

$$\frac{1}{y^3} - 2 . \frac{1}{y^2} - 9 . \frac{1}{y} + 18 = 0$$
$$\text{oder } 1 - 2y - 9y^2 + 18y^3 = 0$$

$$y^3 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{9}y + \frac{1}{18} = 0.$$

Letztere Gleichung hat die drei Wurzeln $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

124.

Erklärung. Wenn in einer Gleichung zwei gleiche Vorzeichen unmittelbar auf einander folgen, so nennt man dies eine Folge, und wenn zwei entgegengesetzte Vorzeichen auf einander folgen, eine Abwechselung der Vorzeichen. So hat z. B. die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$$

zwei Abwechselungen $+-$, $-+$, und eine Folge $--$.

Es ist klar, dass in einer vollständigen Gleichung vom $n$ten Grade die Summe der Folgen und Abwechselungen $= n$ ist.

125.

Lehrsatz. Eine Gleichung (vollständig oder unvollständig) kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als Abwechselungen.

Beweis. Nehmen wir folgende (vollständige oder unvollständige) Gleichung von beliebigen Vorzeichen:

$$x^n + \ldots - Mx^p - \ldots + Nx^q + \ldots \mp \pm Px^r \pm \ldots \pm T = 0 \ldots\ldots (1)$$

die nach den Exponenten, so wie sie von n an kleiner sind, geordnet ist, so können wir annehmen, dass die beiden ersten Glieder entweder unmittelbar auf einander folgen oder doch die etwa dazwischen liegenden Glieder alle das $+$ Zeichen haben und mithin bei M die erste Abwechselung stattfindet. Bei N finde eben so die zweite Abwechselung statt. Zwischen N und $\pm$P mögen beliebig viele Abwechselungen fallen, bei P aber die letzte, d. h. Px^r ist entweder das letzte Glied (wenn $r = 0$), oder die noch folgenden Glieder haben dasselbe Vorzeichen wie P. Irgendwo muss nothwendig die letzte Abwechselung stattfinden.

Um nun aus dieser Gleichung die nächst höhere zu er-

halten, welche die neue positive Wurzel $+a$ enthält, müssen wir sie mit $x-a$ multipliciren. Die Multiplication mit x lässt alle Vorzeichen unverändert, die Multiplication mit $-a$ aber kehrt sie alle um, und man erhält:

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^{n+1}+\ldots-\mathrm{M} & x^{p+1}-\ldots+\mathrm{N} & x^{q+1}+\ldots\mp\pm\mathrm{P} & x^{r+1}\pm\ldots\pm\mathrm{T}x \\ -\mu & +\nu & \pm\pi & \quad\mp\ldots\mp\quad\mp\mathrm{T}a \\ \hline \end{array}$$

$$x^{n+1}+\ldots-\mathrm{M}^1\, x^{p+1}-\ldots+\mathrm{N}^1\, x^{q+1}+\ldots\pm\mathrm{P}^1\, x^{r+1}\ldots\ldots\mp\mathrm{T}a\ldots(2)$$

Weil in Gleichung (1) von x^n bis $-\mathrm{M}x^p$ alle Vorzeichen $+$ sind, so ist klar, dass, wenn die Multiplication mit $-a$ noch ein Glied in x^{p+1} giebt, dies Glied (μx^{p+1}) und mithin auch M^1 nothwendig negativ ist. Aus demselben Grunde ist N^1 positiv, ob in (1) zwischen $\mathrm{M}x^p$ und $\mathrm{N}x^q$ noch ein Glied in x^{q+1} enthalten ist oder nicht, d. h. ob ν positiv oder Null ist &c. Man sieht also, dass es in der neuen Gleichung (2) von x^{n+1} bis $\pm\,\mathrm{P}x^{r+1}$ wenigstens eben so viele Abwechselungen giebt, als in der ursprünglichen Gleichung (1) von x^n bis $\mathrm{P}x^r$. Von da an giebt es in der Gleichung (1) keine Abwechselungen mehr, in der neuen Gleichung (2) jedoch wenigstens noch eine Abwechselung von $\pm\mathrm{P}^1x^{r+1}$ bis $\mp\mathrm{T}a$.

Da nun jede (vollständige oder unvollständige) Gleichung als ein Product aus einfachen zweitheiligen Factoren gedacht werden kann, und jeder einfache Factor, der einer positiven Wurzel entspricht $(x-a)$, wenigstens einen Zeichenwechsel giebt, so ist klar, dass eine jede Gleichung wenigstens so viele Zeichenwechsel als positive Wurzeln hat, oder, was dasselbe ist: eine Gleichung kann jedenfalls nicht mehr positive Wurzeln als Abwechselungen haben. Diesen strengen Beweis hat Gauss zuerst gegeben.

126.

Weil nach § 122 die negativen Wurzeln in positive und umgekehrt verwandelt werden, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt, so ergiebt sich noch ein zweiter Lehrsatz, nämlich: eine Gleichung kann nicht mehr negative Wurzeln haben, als die in $-x$ umgeformte Gleichung positive hat.

So kann z. B. die Gleichung

$$x^7 - 3x^2 + 4x + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

höchstens nur zwei positive und eine negative Wurzel haben, denn die Gleichung hat nur zwei Abwechselungen, und die in $-x$ umgeformte Gleichung, nämlich $x^7 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$, hat nur eine Abwechselung. Da nun aber die Anzahl aller Wurzeln $= 7$ ist, so muss die Gleichung wenigstens vier imaginäre Wurzeln haben.

127 a.

Nach vorstehenden beiden §§ kann man also nicht im Voraus bestimmen, wie viel reelle und wie viel imaginäre Wurzeln eine vorgelegte Gleichung hat, wohl aber, wie viel reelle Wurzeln sie höchstens haben kann, und wenn diese Zahl kleiner ist, als der Grad der Gleichung, wie viel imaginäre Wurzeln sie dann wenigstens haben muss.

127 b.

Ist eine Gleichung vollständig, und sind alle ihre Wurzeln reell, so hat sie offenbar genau so viel positive Wurzeln, als Abwechselungen, und so viel negative, als Folgen der Zeichen, weil die Summe der Folgen und Abwechselungen einer vollständigen Gleichung mit dem Grade derselben übereinstimmt.

128.

Erklärung. Gleichungen, in welchen der letzte Coefficient $= 1$ und alle Coefficienten der vom ersten und letzten Gliede gleichweit abstehenden Potenzen von x einander gleich sind, heissen reciproke Gleichungen, weil dieselben unverändert bleiben, wenn für x der reciproke Werth $\frac{1}{x}$ substituirt wird. Eine solche Gleichung ist z. B.

$$x^5 - 8x^4 + \frac{x^3}{10} + \frac{x}{10} - 8x + 1 = 0.$$

Dividirt man eine reciproke Gleichung vom ungeraden Grade durch $x+1$, so erhält man eine um einen Grad niedrigere reciproke Gleichung (vom geraden Grade).

Sind die Coefficienten einer Gleichung vom letzten Gliede an rückwärts den ersten Coefficienten entgegengesetzt, so giebt die Division durch $x-1$ eine um einen Grad niedrigere reciproke Gleichung (vom geraden Grade).

Der Beweis ist in beiden Fällen leicht durch Multiplication der reciproken Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + Ax + 1 = 0$ mit $x+1$ oder $x-1$ geführt.

Jede reciproke Gleichung vom geraden und zwar $2n$ten Grade (und auf eine solche kann nach den vorstehenden Sätzen auch jede reciproke Gleichung vom ungeraden Grade gebracht werden) reducirt man durch Division mit x^n und nachheriger Substitution von y statt $x + \frac{1}{x}$ auf eine Gleichung, deren Grad halb so gross, als der der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel. $x^5 - 11x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 11x - 1 = 0.$

Durch $x-1$ dividirt (eine Wurzel also $x=1$):

$$x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Durch x^2 dividirt

$$x^2 - 10x + 6 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \ldots\ldots (1)$$

Setzt man hier $x + \frac{1}{x} = y$, so ist

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2.$$

Diese Gleichung von Gleichung (1) subtrahirt:

$$-10x + 4 - \frac{10}{x} = -y^2,$$

durch -10 dividirt

$$x - \tfrac{2}{5} + \frac{1}{x} = \frac{y^2}{10}$$

$$x \quad + \frac{1}{x} = y \text{ subtrahirt}$$

$$-\tfrac{2}{5} = \frac{y^2}{10} - y.$$

Hieraus ergiebt sich $y = 5 \pm \sqrt{21}$ und aus $x + \frac{1}{x} = 5 \pm \sqrt{21}$ die noch fehlenden 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung.

129.

Wir haben nun in dem Vorhergehenden die wichtigsten Sätze über die algebraischen Gleichungen mitgetheilt, welche möglicherweise zur Entdeckung einer bequemen Auflösungsmethode behülflich sein könnten, die, wie schon in § 109 bemerkt, bis jetzt noch nicht gefunden ist. Nur zwei in neuerer Zeit angegebene verdienen erwähnt zu werden. Erstens die Gräfe'sche, welche den von der Berliner Academie darauf gesetzten Preis erhielt. Man findet diese von Encke verbesserte Methode in dem Berliner astronomischen Jahrbuch von 1841. Diese Methode ist aber so unerträglich weitläufig und beschwerlich, dass selbst ein so ausserordentlich schneller Rechner wie Encke dennoch volle drei Stunden gebrauchte, um darnach nur eine Gleichung vom siebenten Grade aufzulösen, d. h. alle ihre reellen sowohl als imaginären Wurzeln zu finden. Zweitens die Methode von Gauss.*) Diese ist allerdings bedeutend bequemer, passt aber nur für dreigliedrige Gleichungen. Diese beiden Methoden würden zusammen einen Band füllen, und können schon deshalb hier nicht Platz finden.

Bei den Anwendungen der höhern Gleichungen auf wirkliche Fälle des praktischen Lebens kommt es jedoch sehr häufig vor, dass man nicht alle Wurzeln, sondern nur eine

---

*) Gauss Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Göttingen, in der Dieterich'schen Buchhandlung.

(und zwar aus andern Gründen oftmals schon halbweg bekannte) positive Wurzel zu bestimmen braucht. In solchen Fällen kann man dann, jedenfalls viel bequemer, auf folgende indirecte Weise verfahren:

Man substituire die näherungsweise bekannte oder gemuthmasste Wurzel. Das Resultat der Substitution wird dann zeigen, ob die Wurzel zu gross oder zu klein ist. Macht man mit der allmälig veränderten Wurzel ein paar Substitutionen mehr, so wird man die Wurzel so genau erhalten, als die praktischen Zwecke es erfordern.*)

Weiss man, dass die gesuchte Wurzel > 1 ist, so kann man die Gleichung auch auf die höchste Potenz der Unbekannten reduciren und umgekehrt, wenn die Wurzel < 1 ist.

Sucht man z. B. die positive Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

welche offenbar > 2 (§ 113), so hat man aus $x^3 = 5 + 2x$

$$x = \sqrt[3]{5 + 2x} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Setzt man rechter Hand $x = 2$, so ist $x = \sqrt[3]{9} = 2{,}08\dots$; setzt man auf's Neue rechter Hand $x = 2{,}08$, so ist $x = \sqrt[3]{9{,}16} = 2{,}092\dots$; dann: $x = \sqrt[3]{9{,}184} = 2{,}094$. Ferner $x = \sqrt[3]{9{,}188} = 2{,}0945$ (bis auf vier Decimalen genau).

Schreitet eine unendliche Reihe nach Potenzen einer Unbekannten fort, so kann man dieselbe zunächst mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten in einen Quotient verwandeln.

Es sei z. B.

$$x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{7} + \frac{x^5}{9} + \frac{x^6}{11} + \dots = \frac{1}{10}$$

---

*) Die Regel: dass man zwei Werthe, a und b, suchen soll, welche, statt x gesetzt, entgegengesetzte Resultate geben, zwischen welchen Werthen, a und b, dann die wahre Wurzel zu suchen sein würde (§ 100), ist offenbar falsch, denn die aus der construirten Gleichung entspringende Linie kann ganz oberhalb der Abscissenachse liegen oder auch dieselbe nur berühren, statt zu schneiden. In diesem Falle existiren die erwähnten Werthe a und b gar nicht.

gegeben. Da nun

$$\frac{x+Ax^2}{1+Bx+Cx^2}=x+(A-B)x^2+(B^2-C-AB)x^3$$
$$+(AB^2+2BC-AC-B^3)x^4+\ldots,$$

so ist

$$A-B=\tfrac{1}{3},\ B^2-C-AB=\tfrac{1}{5},$$
$$AB^2+2BC-AC-B^3=\tfrac{1}{7},$$

aus welchen Gleichungen sich

$$A=-\tfrac{11}{21},\ B=-\tfrac{6}{7},\ C=\tfrac{3}{35}\ \text{ergiebt.}$$

Die gegebene Gleichung wird jetzt

$$\frac{x-\dfrac{11x^2}{21}}{1-\dfrac{6x}{7}+\dfrac{3x^2}{35}}=\tfrac{1}{10}$$

und man findet $x=0{,}09383337$ bis zur letzten Decimalstelle genau. Der Vortheil dieser Methode besteht darin, dass die Gleichung nur zu einer Gleichung zweiten Grades führt und die Glieder bis x^4 vollständig, x^5 aber noch annähernd berücksichtigt ist.

Bekanntlich führt in der Rentenrechnung die Bestimmung der Procente p aus der Mise m, der Rente r und der Zeit a (in Jahren) zu einer allgemein nicht aufzulösenden Gleichung. Löst man dagegen $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{a+1}$ nach dem binomischen Lehrsatz auf, so erhält man durch die vorstehende Methode unter Anwendung einiger Kunstgriffe den überaus bequemen und selbst für ein grösseres a noch auf etliche Decimalstellen richtigen Ausdruck

$$p=\frac{200(ar-m)}{(a+1)m}\cdot\left(\frac{m}{ar}\right)^{\frac{a-1}{3(a+1)}}.$$

Der Taylor'sche Lehrsatz bietet übrigens oft noch leichtere Mittel zur Auflösung der Gleichungen dar, und es scheint eine vollständige Theorie der höheren Gleichungen die Differentialrechnung nicht ganz umgehen zu können.

Neuntes Buch.

Auflösung aller zweigliedrigen Gleichungen.

130.

Die zweigliedrigen oder sogenannten reinen (binomischen) höhern Gleichungen lassen sich, wie Gauss zuerst gezeigt hat,*) alle direct und leicht lösen. Wir betrachten diese Gleichungen zuerst in der Form

$$x^n \pm 1 = 0,$$

worauf sie alle gebracht werden können.

131.

Berücksichtigen wir in obiger Form zuerst das untere Zeichen, nämlich:

$$x^n - 1 = 0$$
$$x^n = 1$$

so ist klar, dass diese Gleichung, wenn n gerade, zwei reelle Wurzeln, $+1$ und -1, und wenn n ungerade, eine reelle Wurzel, $+1$, hat und nach § 127a nicht mehr reelle Wurzeln haben kann. Die übrigen Wurzeln müssen also imaginär, und wie die Rechnung selbst gleich zeigen wird, alle verschieden sein. Mit andern Worten: es können aus ± 1 so viele verschiedene Wurzeln

*) S. Serret Cours d'algèbre supérieure. Dies Werk handelt fast blos über höhere Gleichungen, setzt aber nicht allein alles Vorhergehende, sondern auch Differential- und Integralrechnung als bekannt voraus.

desselben Grades gezogen werden, als man will. Denn bezeichnen wir nach Cauchy die gewöhnliche arithmetische $n$te Wurzel aus 1 mit $\sqrt[n]{1}$, alle n Wurzeln aus ± 1 aber mit $((\pm 1))^{\frac{1}{n}}$, so ist, weil immer $\cos 2k\pi = 1$ und $\sin 2k\pi = 0$, wenn k irgend eine ganze Zahl ist (Trigonometrie § 59) und zufolge § 88, was auch k und n für ganze Zahlen sein mögen, immer

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi \pm i \sin 2k\pi = 1.$$

Da nun der Ausdruck $\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}$ auf die $n$te Potenz erhoben $+1$ giebt, so ist dieser Ausdruck auch die $n$te Wurzel aus $+1$.

Dass nun aber, wenn in diesem Ausdruck für n eine beliebige ganze Zahl und dann für k successive die Zahlen $0, 1, 2 \ldots \frac{1}{2}n$ gesetzt werden, n verschiedene Werthe (Wurzeln) kommen, folgt aus den Lehren der Trigonometrie, wornach die Ausdrücke $\cos \frac{0.\pi}{n} \pm i \sin \frac{0.\pi}{n}$, $\cos \frac{1.\pi}{n} \pm i \sin \frac{1.\pi}{n}$ &c. offenbar verschieden sind. Man findet also alle n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, indem man in

$$x = ((1))^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

für $2k$ successive alle geraden Zahlen zwischen 0 und n, oder, was dasselbe ist, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots \frac{1}{2}n$ setzt. Man habe z. B. die Gleichung

$$x^6 - 1 = 0,$$

so ist, weil hier $n = 6$,

$$x = ((1))^{\frac{1}{6}} = \cos \frac{2k\pi}{6} \pm i \sin \frac{2k\pi}{6},$$

$$\text{für } k = 0 \text{ ist } x = \cos 0\pi \pm i \sin 0\pi = 1,$$

$$\text{„ } k = 1 \text{ „ } x = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,i\text{*)},$$

---

*) Es ist nämlich: $\cos \frac{1}{3}\pi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

für $k=2$ ist $x=\cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i$,
„ $k=3$ „ $x=\cos\pi\pm i\sin\pi = -1$.

Die Gleichung $x^6-1=0$ hat also wirklich sechs verschiedene Wurzeln, und es ist

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$

oder indem man die Factoren, welche zweien gepaarten Wurzeln entsprechen, mit einander multiplicirt, um lauter reelle Grössen zu erhalten, und deshalb die dreigliedrigen (trinomischen) Factoren einführt:

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

132.

Man könnte glauben, noch mehrere Wurzeln zu erhalten, wenn man für k Werthe setzt, die über $\frac{1}{2}n$ hinausgehen. Dies ist aber eben nur eine Annahme, die schon § 104 verbietet. Denn, weil $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos\left(\pi+\frac{2h}{n}\pi\right) = -\cos\frac{2h}{n}\pi$ und auch $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi = \cos\left(\pi-\frac{2h}{n}\pi\right) = -\cos\frac{2h}{n}\pi$, so ist immer $\cos 2\frac{(\frac{1}{2}n+h)}{n}\pi = \cos 2\frac{(\frac{1}{2}n-h)}{n}\pi$, d. h. für alle Werthe von k, welche eben so viel über als unter $\frac{1}{2}n$ sind, erhält man dieselben Cosinus wieder, und eben so dieselben Sinus, letztere nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil $\sin\left(\pi+\frac{2h}{n}\pi\right) = -\sin\frac{2h}{n}\pi$ und $\sin\left(\pi-\frac{2h}{n}\pi\right) = \sin\frac{2h}{n}\pi$, aus welchem Grunde gleich das doppelte Vorzeichen $\pm$ gesetzt ist. In obigem Beispiel für $x^6-1=0$ ist $\frac{1}{2}n=3$, und es kommt z. B. für $k=3+1=4$ derselbe Cosinus wie für $k=3-1=2$ &c.

Hätte man die Gleichung

$$x^3-1=0,$$

so ist $x=(1)^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k\pi}{3} \pm i\sin\frac{2k\pi}{3}$

für $k=0$ ist: $x=\cos 0=1$
„ $k=1$ „ $x=\cos 120^0 \pm i \sin 120^0$
oder: $x=-\cos 60^0 \pm i \sin 60^0 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i.$

Mithin ist

$$x^3-1=(x-1)(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

133.

Man kann auch, ohne erst die zweigliedrigen Factoren von x^n-1 zu suchen, gleich die dreigliedrigen berechnen. Aus

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}$$

folgt nämlich der eine einfache Factor $x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$ und der andere zugehörige $x-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$. Multiplicirt man beide mit einander und beachtet, dass $\cos^2\frac{2k\pi}{n}+\sin^2\frac{2k\pi}{n}=1$, so ist der dreigliedrige Factor

$$x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1;$$

hierin setze man $k=0, 1, 2 \ldots \frac{1}{2}n$. Wird aber der Ausdruck ein vollkommenes Quadrat, was, wenn n gerade, für $k=0$ und $k=\frac{1}{2}n$, und wenn n ungerade, für $k=0$ der Fall ist, so muss jedesmal nur die Wurzel genommen werden, indem die einfachen reellen Factoren $x-1$ und $x+1$ nur einmal vorhanden sind. Sei z. B. $n=3$, also die Gleichung $x^3-1=0$, so hat man

$$x^2-2x.\cos\frac{2k\pi}{3}+1;$$

für $k=0$ kommt: $x^2-2x+1=(x-1)^2$
„ $k=1$ „ $x^2-2x\cos 120^0+1=x^2+x+1,$
daher $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$

Für die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ hat man

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{6} + 1,$$

für $k = 0$ kommt: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
„ $k = 1$ „ $x^2 - 2x\cos 60^0 + 1 = x^2 - x + 1$
„ $k = 2$ „ $x^2 - 2x\cos 120^0 + 1 = x^2 + x + 1$
„ $k = 3$ „ $x^2 - 2x\cos\pi + 1 = (x+1)^2$
mithin: $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

134 a.

Hat man allgemeiner die Gleichung

$$x^n - a = 0,$$

so sind die n einfachen Factoren derselben*)

$$x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).\sqrt[n]{a}$$

und die dreigliedrigen

$$x^2 - 2x.\sqrt[n]{a}.\cos\frac{2k\pi}{n} + (\sqrt[n]{a})^2.$$

134 b.

Um nun auch die n Wurzeln der andern Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

zu finden, beachte man, dass, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, immer $\cos(2k+1)\pi = -1$, und $\sin(2k+1)\pi = 0$. (Trigonometrie § 59.) Weil ferner

$$\left(\cos\frac{2k+1}{n}.\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^n = \cos(2k+1)\pi \pm i\sin(2k+1)\pi = -1,$$

so ist nothwendig auch

---

*) Aus $x^n = 1.a$ folgt nämlich: $x = ((1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{a}$.

$$x = ((-1))^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

worin für $2k+1$ alle ungeraden Zahlen zwischen 0 und n gesetzt werden müssen.

Die dreigliedrigen Factoren von x^n+1 sind hier

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1$$

und allgemein für $x^n + a$

$$x^2 - 2x.\sqrt[n]{a}.\cos\frac{2k+1}{n}\pi + (\sqrt[n]{a})^2.$$

Beispiel 1. Für $x^3+1=0$ hat man

$$x = ((-1))^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k+1}{3}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{3}\pi.$$

Für $k=0$ ist $x = \cos\frac{1}{3}\pi \pm i\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}.i,$
„ $k=1$ „ $x = \cos\pi \pm i\sin\pi = -1,$

mithin $x^3+1 = (x+1)(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.i)(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.i),$
$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1).$

Beispiel 2. Für $x^6+1=0$ hat man

$$x = \cos\frac{2k+1}{6}\pi \pm i\sin\frac{2k+1}{6}\pi$$

Für $k=0$ ist $x = \cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}i,$

„ $k=1$ „ $x = \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2} = \pm i,$

„ $k=2$ „ $x = \cos\frac{5\pi}{6} \pm i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}i.$

Es ist also

$x^6+1 = (x+i)(x-i)(x-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)(x-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i),$
$x^6+1 = (x^2+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1).$

Zehntes Buch.

Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen.

1. Auflösung der cubischen Gleichungen.

135.

Da man nach § 120 aus jeder cubischen Gleichung das Glied, welches die unbekannte Grösse in der zweiten Potenz enthält, fortschaffen kann, so können wir annehmen, dass jede aufzulösende cubische Gleichung entweder die Form

$$x^3 + px + q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

schon habe, oder erst darauf gebracht worden sei.

Wir betrachten nun die Wurzel dieser Gleichung als aus zwei Theilen, y und z, bestehend, und setzen $y+z$ statt x, so ist:

$$(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$
$$3yz(y+z) + p(y+z) + y^3 + z^3 + q = 0$$
$$(3yz+p)(y+z) + y^3 + z^3 + q = 0 \ldots\ldots (3)$$

Könnte man nun für y und z solche Werthe finden, welche der Gleichung (3), also auch der Gleichung (2), Genüge leisten, so würde offenbar auch ihre Summe, statt x gesetzt, der Gleichung (1) genügen. Der Gleichung (3) wird aber offenbar Genüge geleistet, wenn man y und z so bestimmt, dass $3yz + p = 0$ und zugleich auch $y^3 + z^3 + q = 0$, woraus

$$yz = -\tfrac{1}{3}p,$$
$$y^3 + z^3 = -q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten findet man nun aber auf elementarem Wege leicht y und z. Die zweite Gleichung quadrirt und davon den vierfachen Cubus der ersten subtrahirt, kommt

$$y^6 - 2y^3z^3 + z^6 = q^2 + \tfrac{4}{27}p^3,$$

$$\text{woraus } y^3 - z^3 = \sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

$$\text{hiezu } y^3 + z^3 = -q$$

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

$$z^3 = -\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}\sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

Es ist mithin, weil $x = y + z$,

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}}.$$

136 a.

Vorstehende sogenannte Cardanische Formel*) bedarf aber noch einer umständlichen Erläuterung. Jede cubische Gleichung hat drei Wurzeln und darunter wenigstens eine reelle (§ 113). Die Cardanische Formel giebt aber scheinbar nur eine Wurzel, denn die entgegengesetzten beiden Werthe der Quadratwurzel sind schon berücksichtigt und durch ihre Vorzeichen angedeutet. Da nun aber die Cubikwurzel aus einer Grösse auch drei verschiedene Werthe hat (§ 134 a), so ist, wenn man die beiden Grössen unter dem Zeichen $\sqrt[3]{\;}$ Kürze halber mit A und B bezeichnet:

$$x = ((1))^{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{A} + ((1))^{\frac{1}{3}} . \sqrt[3]{B}$$

wo nun $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ die gewöhnlichen arithmetischen, die drei Cubikwurzeln aus der Einheit aber nach § 132

$$1 \text{ und } \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ und } \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

---

*) Im Jahre 1505 von Scipio Ferreo gefunden, von Cardanus später nur veröffentlicht.

oder, wenn man, Kürze halber, die zweite mit m, also die dritte mit m^2 bezeichnet, weil $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$

$$1 \text{ und } m \text{ und } m^2$$

sind, so hat man für jede der beiden in der Cardanischen Formel vorkommenden Cubikwurzeln drei verschiedene Werthe, nämlich:

$$\sqrt[3]{A}, m\sqrt[3]{A}, m^2\sqrt[3]{A}$$
$$\sqrt[3]{B}, m\sqrt[3]{B}, m^2\sqrt[3]{B}.$$

Da nun die Summe von einem Paar aus beiden Reihen eine Wurzel der Gleichung $x^3+px+q=0$ sein muss, es hier aber neun verschiedene Paare giebt (§ 20), so scheint jetzt der Segen zu gross zu werden, indem die Gleichung doch nicht neun, sondern nur drei Wurzeln haben kann. Woran liegt's?

136 b.

Es liegt daran, dass wir die Wurzeln derselben in zwei Theile, y und z, zerlegten und diese Theile durch die beiden neuen Gleichungen:

$$yz = -\frac{p}{3}$$

$$y^3+z^3 = -q$$

bestimmten. Durch diese beiden Bedingungen legen wir aber den beiden Theilen der Wurzel die Eigenschaft bei, dass ihr Product reell $(= -\frac{p}{3})$ und auch die Summe ihrer Cuben reell $(= -q)$ sei. Durch diese eben durch die benutzte Auflösungsmethode durch den ersten Erfinder derselben und ihm selbst wohl unbewusst hinzugefügte und jetzt zu berücksichtigende Bedingung wird die Wahl unter den erwähnten neun Paaren der gefundenen Wurzeln dermassen eingeschränkt, dass wirklich nur drei übrig bleiben. Es ist nämlich, wenn wir die drei Wurzeln der Gleichung mit x', x'', x''' bezeichnen,

$$x' = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$
$$x'' = m\sqrt[3]{A} + m^2\sqrt[3]{B}$$
$$x''' = m^2\sqrt[3]{A} + m\sqrt[3]{B}.$$

Da nun $m = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $m^3 = 1, m^6 = (m^3)^2 = 1$, so ist klar, dass die aufgestellten drei Paar Werthe für y, z, und nur diese drei, die erwähnten Bedingungen erfüllen. Setzt man für m und m^2 ihre Werthe, so kann man die drei Wurzeln auch so schreiben:

$$x' = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$
$$x'' = -\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2} + \frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2}.\sqrt{-3}$$
$$x''' = -\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2} - \frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2}.\sqrt{-3}.$$

Anmerkung 1. Ist in der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, p positiv, so hat, was auch q sein möge, die Gleichung immer zwei imaginäre Wurzeln (§ 127).

Anmerkung 2. Wäre p negativ und $\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27} = 0$, so wäre $A = B = -\frac{1}{2}q$ und die Gleichung hat dann lauter reelle Wurzeln, worunter zwei gleiche:

$$x' = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q};\ x'' = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q};\ x''' = -\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}.$$

Beispiel 1. Aus der Gleichung

$$x^3 + 6x - 7 = 0$$

folgt nach der Formel

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}},$$

indem hier $p = 6$, $q = -7$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} + \sqrt{\tfrac{49}{4} + 8}} + \sqrt[3]{\tfrac{7}{2} - \sqrt{\tfrac{49}{4} + 8}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1}$$

mithin sind die drei Wurzeln (weil hier $A = 8$ und $B = -1$):

$$x' = 2 - 1 = 1,$$

$$x'' = \frac{-1 + 3\sqrt{-3}}{2}$$

$$x''' = \frac{-1 - 3\sqrt{-3}}{2}$$

$$x^3 + 6x - 7 = (x-1)(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3})(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\sqrt{-3}).$$

Beispiel 2. Man hat aus der Gleichung

$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-27}$$

$$x' = -6, \; x'' = 3, \; x''' = 3$$

$$x^3 - 27 + 54 = (x+6)(x-3)^2.$$

137.

Die Cardanische Formel enthält zwei grosse Unvollkommenheiten.

1. Giebt sie die reelle Wurzel, wenn sie auch rational ist, oftmals unter einer irrationalen Form. So ist z. B. die reelle Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 6x - 40 = 0,$$

wie man leicht sieht, $= 4$. Unsere Formel aber giebt

$$x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{400 - 8})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{400 - 8})}$$
$$x = 3{,}41421\ldots + 0{,}58578\ldots = 3{,}99999\ldots$$

Man könnte nun freilich durch ein ähnliches Verfahren, durch welches man den Werth von $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ findet (Algebra § 327),

auch $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ bestimmen. Dies würde hier aber wieder auf eine cubische Gleichung führen, mithin ein logischer Kreis sein.

2. Eine grössere Unvollkommenheit der Cardanischen Formel liegt aber noch darin, dass sie, wenn p negativ und zugleich $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$, also auch die Grösse $\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}$ negativ ist, die Wurzeln unter einer imaginären Form giebt, obgleich doch in diesem Falle alle drei Wurzeln stets reell sind.*) Dieser Umstand, welcher den Alten, die mit den imaginären Grössen noch nicht umzugehen wussten, viel Kopfbrechens verursacht hat, wurde von ihnen der irreducible Fall genannt. Und in der That, wären seitdem nicht Mittel erfunden, um aus dieser Verwickelung herauszukommen, die Cardanische Formel würde in diesem Falle nichts nützen und also auch nicht als eine vollständige Auflösung betrachtet werden können.

138.

Um nun für den Fall, dass p negativ und zugleich $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$ ist, die Formel

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}$$

---

*) Man denke sich die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ construirt, so erhält man für $x = 0$ eine positive Ordinate. Für $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ kommt:

$$\tfrac{p}{3}\sqrt{\tfrac{p}{3}} - p\sqrt{\tfrac{p}{3}} + q = -\tfrac{2}{3}p\sqrt{\tfrac{p}{3}} + q$$

also eine negative Ordinate, denn weil nach Voraussetzung $\frac{4p^3}{27} < q^2$, so ist offenbar auch $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} > q$. Für $x = \sqrt{p}$ hat man $p^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} + q$, mithin wieder eine positive Ordinate. Die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ hat also wirklich drei reelle Wurzeln, zwei positive, zwischen 0 und $\sqrt{p}$ und zwischen $\sqrt{\frac{p}{3}}$ und $\sqrt{p}$, und eine negative nach § 113. Dasselbe gilt von der Gleichung $x^3 - px - q = 0$, welche nach § 122 die entgegengesetzten Wurzeln von $x^3 - px + q = 0$, also eine positive und zwei negative Wurzeln hat.

zum Spruch zu bringen und zu zeigen, dass alle drei reellen Wurzeln daraus hervorgehen, setzen wir

$$-\tfrac{1}{2}q = \varrho\cos\varphi \qquad \text{mithin } \tfrac{1}{4}q^2 = \varrho^2\cos^2\varphi,$$

$$\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \tfrac{1}{4}q^2\right)} = \varrho\sin\varphi \qquad \frac{p^3}{27} - \tfrac{1}{4}q^2 = \varrho^2\sin^2\varphi$$

$$\text{hieraus: } \varrho = \sqrt{\frac{p^3}{27}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\cos\varphi = \frac{-\tfrac{1}{2}q}{\varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x = \sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + \sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)}\ *)$$

$$x = \varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}} + \varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) + \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right) \text{ (§ 88)}$$

$$x = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{\varphi}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Man bestimme also erst den Modulus ϱ aus (1), dann φ aus (2), indem man zu dem Winkel, welchen die Tafeln geben, $2k\pi$ hinzufügt, alsdann $k=0,\ 1,\ 2$ setzt, so giebt die Formel (3) drei und nur drei verschiedene Werthe für x, nämlich

$$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{\varphi}{3};\ x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{2\pi+\varphi}{3};\ x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}}.\cos\frac{4\pi+\varphi}{3};$$

denn wollte man auch noch $k=3,\ 4\ldots\ldots$ setzen, so würden doch die drei verschiedenen Cosinus in den letzteren Ausdrücken in derselben Ordnung wiederkehren. Setzt man z. B. in $\cos\frac{2k\pi+\varphi}{3}$, $k=3$, so ist $\cos\left(2\pi+\frac{\varphi}{3}\right) = \cos\frac{\varphi}{3}$, also dasselbe wie für $k=0$; setzt man $k=4$, so ist $\cos\left(2\pi+\frac{2\pi+\varphi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$ dasselbe wie für $k=1$ &c.

---

*) Wenn nämlich: $\sqrt{\frac{p^3}{27} - \frac{1}{4}q^2} = \varrho\sin\varphi$, so ist $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} = \varrho\sin\varphi.\sqrt{-1}$.

Beispiel. Es ist die Gleichung:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

gegeben, so ist $p = -7$, $q = +6$ und $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4}q^2$, mithin

$$\varrho = \sqrt{\frac{7^3}{27}}; \qquad \cos\varphi = -\frac{3}{\varrho}$$

$\log 7^3 = 2{,}5342940$
$\ldots 27 = 1{,}4313638$
$\quad 1{,}1039302$
$2)$
$\log \varrho = 0{,}5519651$
$\log \varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}1839884$

$\log 3 = 0{,}4771213\,(n)$
$\ldots \varrho = 0{,}5519651$
$\cos\varphi = 9{,}9251562\,(n)$
$\varphi = 147^0\,19'\,11'',4$

$\frac{\varphi}{3} = 49^0 6' 23'',8$	$\frac{2\pi+\varphi}{3} = 169^0 6' 23'',8$	$\frac{4\pi+\varphi}{3} = 289^0 6' 23'',8$
$x' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} . \cos\frac{\varphi}{3}$	$x'' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} . \cos\frac{2\pi+\varphi}{3}$	$x''' = 2\varrho^{\frac{1}{3}} . \cos\frac{4\pi+\varphi}{3}$
$\log\cos\frac{\varphi}{3} = 9{,}8160116$	$\log\cos\frac{2\pi+\varphi}{3} = 9{,}9921028(n)$	$\log\cos\frac{4\pi+\varphi}{3} = 9{,}5149817$
$\ldots\ldots \varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}1839884$	$\ldots\ldots 2\varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}4850184$	$\ldots\ldots 2\varrho^{\frac{1}{3}} = 0{,}4850184$
$\ldots\ldots 2 = 0{,}3010300$	$\log x'' = 0{,}4771212(n)$	$\log x''' = 0{,}0000001$
$\log x' = 0{,}3010300$	$x'' = -3$	$x''' = 1$
$x' = 2$		

2. Auflösung der Gleichung 4. Grades.

139.

1. Auflösung. Nach § 120 kann

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

als gegeben betrachtet werden. Dividirt man diese Gleichung durch $x^2 + nx + p$, so erhält man

$$x^2 - nx + a + n^2 - p + \frac{(b + 2np - an - n^3)x + c + p^2 - ap - n^2p}{x^2 + nx + p} = 0.$$

Soll nun (s. 8. Buch) der Divisor $x^2 + nx + p = 0$ zwei Auflösungen der gegebenen Gleichung enthalten, so muss der

Rest, d. i. der vorstehende gebrochene Theil des Quotient $=0$, oder

$$b+2np-an-n^3=0\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

$$c+p^2-ap-n^2p=0\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

sein und die ganze Function des Quotient oder

$$x^2-nx+a+n^2-p=0\ldots\ldots \qquad (\mathrm{III})$$

wird dann die beiden noch fehlenden Wurzeln einschliessen. Um die Gleichungen I und II nach n aufzulösen, kann man zunächst aus I

$$p=\frac{a+n^2}{2}-\frac{b}{2n}\ldots\ldots \qquad (\mathrm{IV})$$

bestimmen und in II substituiren. Setzt man hierauf $n^2=r$, so ergiebt sich

$$r^3+2ar^2+(a^2-4c)r-b^2=0.$$

Ist hier r bestimmt, so findet sich $n=\sqrt{r}$ und aus IV:

$$p=\frac{a+r}{2}-\frac{b}{2\sqrt{r}}.$$

Die Gleichung $x^2+nx+p=0$ giebt nun die folgenden 2 Wurzeln der Gleichung 4. Grades

$$x=-\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}-p} \text{ d. i.}$$

$$x=-\frac{\sqrt{r}}{2}\pm\sqrt{-\frac{b}{2\sqrt{r}}-\frac{a}{2}-\frac{r}{4}}\ldots\ldots \qquad (\mathrm{V})$$

Die andere Gleichung

$$x^2-nx+a+n^2-p=0$$

führt zu den noch fehlenden Wurzeln, die mit V übereinstimmen, wenn daselbst $\sqrt{r}$ negativ genommen wird, was auch wegen $n=\pm\sqrt{r}$ zu erwarten stand. Die ganze Auflösung reducirt sich somit auf folgende Ausdrücke

$$r^3+2ar^2+(a^2-4c)r-b^2=0\ldots\ldots \qquad (\mathrm{A})$$

Es genügt, für r die positive Wurzel (s. § 113) allein zu nehmen.*)

---

*) Setzt man $r=u-\frac{2a}{3}$, so ist

$$u^3-\left(\frac{a^2}{3}+4c\right)u-\frac{2a^3}{27}+\frac{8ac}{3}-b^2=0.$$

$$x^{\rm I} \text{ und } x^{\rm II} = -\frac{\sqrt{r}}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{2\sqrt{r}} - \frac{a}{2} - \frac{r}{4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

$$x^{\rm III} \text{ und } x^{\rm IV} = \frac{\sqrt{r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{b}{2\sqrt{r}} - \frac{a}{3} - \frac{r}{4}} \quad \ldots \quad \text{(C)}$$

Beispiel. $x^4 - 35x^2 - 140x - 50 = 0.$

Mit $a = -35$, $b = -140$, $c = -50$ wird A:

$$r^3 - 70r^2 + 1425r - 19600 = 0$$

$$r = 49{,}11033 \text{ und } \sqrt{r} = 7{,}00788.$$

Aus B: $x = -3{,}50394 \pm \sqrt{-\frac{70}{\sqrt{r}} + 17{,}5 - 12{,}27758}$

d. i. $x = -3{,}50394 \pm \sqrt{-9{,}98876 + 4{,}22242}$

oder $x^{\rm I}$ und $x^{\rm II} = -3{,}50394 \pm 2{,}40132\,i.$

Aus C: $x = 3{,}50394 \pm \sqrt{9{,}98876 + 4{,}22242},$

oder $x^{\rm III} = 7{,}27371$

$x^{\rm IV} = -0{,}265833.$

2. Auflösung. Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ mit $x^{\rm I}$, $x^{\rm II}$, $x^{\rm III}$, $x^{\rm IV}$ und setzt

$$x^{\rm I} + x^{\rm II} = u,\ x^{\rm III} + x^{\rm IV} = v,$$

$$x^{\rm I} x^{\rm II} = v,\ x^{\rm III} x^{\rm IV} = z, \text{ so ist}$$

$$-x^{\rm I} - x^{\rm II} - x^{\rm III} - x^{\rm IV} = 0 \text{ oder I. } -u - v = 0.$$

$$x^{\rm I} x^{\rm II} + x^{\rm I} x^{\rm III} + \ldots\ldots = a \text{ oder II. } w + uv + z = a.$$

$$-(x^{\rm I} x^{\rm II} x^{\rm III} + x^{\rm I} x^{\rm II} x^{\rm IV} + \ldots) = b \text{ oder III. } vw + uz = -b.$$

Endlich $x^{\rm I} x^{\rm II} x^{\rm III} x^{\rm IV} = c$ oder IV. $wz = c$.

Aus I: $v = -u$, aus IV: $z = \frac{c}{w}$ giebt in II und III:

$$w + \frac{c}{w} = a + u^2 \text{ und } w - \frac{c}{w} = \frac{b}{u} \ldots\ldots (Y)$$

Quadrirt man beide Gleichungen und subtrahirt sie alsdann, so erhält man

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0.$$

Ist hier u gefunden, so ergiebt sich aus Y: w und aus beiden $x^{\rm I}$ und $x^{\rm II}$ u. s. w.

3. Auflösung. Setzt man die Gleichung

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

identisch mit $(x^2+r)^2 = m(x+n)^2$ d. i.

$$x^4+(2r-m)x^2-2mnx+r^2-mn^2=0,$$

so ist

$$2r-m=a, \quad -2mn=b, \quad r^2-mn^2=c.$$

Mit $r=\frac{a+m}{2}$ und $n=-\frac{b}{2m}$ ergiebt sich aus der letzten vollkommenen Gleichung

$$\left(\frac{a+m}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4m}=c \text{ oder}$$

$$m^3+2am^2+(a^2-4c)m-b^2=0.$$

Mit m ist nun auch r und n bekannt, und

$$x^2+r=\pm\sqrt{m}.(x+n)$$

enthält die 4 gesuchten Wurzeln.

Anmerkung. Addirt man zu der gegebenen Gleichung

$$\begin{array}{r} x^4+ax^2+c=-bx: \\ mx^2+n=mx^2+n \\ \hline x^4+(a+m)x^2+c+n=mx^2-bx+n \end{array}$$

und setzt diese Gleichung identisch mit

$$\left(x+\frac{a+m}{2}\right)^2=(\sqrt{m}.x-\sqrt{n})^2,$$

so erhält man eine Auflösung, die mit der vorstehenden 3. übereinstimmt.

4. Auflösung. Setze $x=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$,
$x=p(\cos\psi\pm i\sin\psi)$.

Vergleicht man das Product dieser 4 annullirten Gleichungen mit der gegebenen $x^4+ax^2+bx+c=0$, so ist

$$\begin{aligned} r\cos\varphi+p\cos\psi&=0 \\ p^2+r^2+4pr\cos\varphi\cos\psi&=a \\ 2pr(r\cos\psi+p\cos\varphi)&=-b \\ (pr)^2&=c. \end{aligned}$$

Aus der 1. und 3. Gleichung findet man

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi&=-\frac{b}{2r(p^2-r^2)} \\ \cos\psi&=\frac{b}{2p(p^2-r^2)} \end{aligned}\right\}\ldots(A)$$

und damit aus der 2. Gleichung

$$p^2 + r^2 - \frac{b^2}{p^4 - 2p^2r^2 + r^4} = a \ldots\ldots (B)$$

$$p^2 + r^2 = z \ldots\ldots\ldots (C)$$

gesetzt, giebt mit $p^2r^2 = c$:

$$z - \frac{b^2}{z^2 - 4c} = a, \text{ oder}$$

$$z^3 - az^2 - 4cz + 4ac - b^2 = 0.$$

Ist hier $z = p^2 + r^2$ gefunden, so wird B:

$$z - \frac{b^2}{(p^2 - r^2)^2} = a, \text{ daher}$$

$$p^2 - r^2 = \frac{b}{\sqrt{z - a}} \ldots\ldots (D)$$

C + D und C − D führt zu p und r, A alsdann zu $\cos\varphi$ und $\cos\psi$ u. s. w.

5. Auflösung. Diese bezieht sich auf die vollständige Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

und macht daher das oft beschwerliche Beseitigen des Gliedes x^3 unnöthig.

Es seien die 4 Wurzeln $m + n$, $m - n$, $p + q$, $p - q$. Das Product der annullirten Wurzelgleichungen ($x - m - n = 0$ u. s. w.) mit der gegebenen verglichen:

$$a = -2(m + p) \ldots\ldots (I)$$

$$b = m^2 - n^2 + p^2 - q^2 + 4mp \ldots\ldots (II)$$

$$c = -2p(m^2 - n^2) - 2m(p^2 - q^2) \ldots\ldots (III)$$

$$d = (m^2 - n^2)(p^2 - q^2) \ldots\ldots\ldots (IV).$$

Setzt man $m^2 - n^2 = u \ldots\ldots (V)$

so erhält man aus IV: $p^2 - q^2 = \frac{d}{u} \ldots\ldots\ldots (VI)$

und aus I $\quad p = -\frac{a}{2} - m \ldots\ldots (VII)$

Mit diesen Ausdrücken findet sich aus II und III:

$$b = u + \frac{d}{u} - 4m\left(\frac{a}{2} + m\right) \ldots\ldots (VIII)$$

und $c = au + 2mu - \frac{2dm}{u}$.

Substituirt man den für m aus der letzten Gleichung gefundenen Ausdruck in VIII, so ergiebt sich, wenn noch

$$u + \frac{d}{u} = y \ldots\ldots\ldots \text{(IX)}$$

gesetzt wird:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + d(4b - a^2) - c^2 = 0\,^{*)} \ldots\ldots \text{(A)}$$

Mit y folgt nun aus IX:

$$u = \frac{y + \sqrt{y^2 \quad 4d}}{2}$$

und da Gleichung VIII auch

$b = y - 4m\left(\frac{a}{2} + m\right)$ geschrieben werden kann, so ist

$$m = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(y - b)}}{4}.$$

Aus VII folgt $p = -\frac{a}{2} - m,$

aus V $\qquad n = \sqrt{m^2 - u}.$

$\frac{d}{u} = y - u$ (siehe IX) giebt aus VI:

$$q = \sqrt{u - y + p^2}.$$

Die Gleichung 4. Grades ist mithin mit A und den darauf folgenden 5 Ausdrücken gelöst; denn $x = m + n$ u. s. w. (s. ob.).

6. **Auflösung.** Die Gleichung $x^4 + ax + b = 0$ lässt eine ziemlich einfache Auflösung zu.

Setze $x^2 = mx + n \ldots\ldots\ldots$ (A)

folglich $\quad x^4 = m^2x^2 + 2mnx + n^2$ d. i.

$$x^4 = m^2(mx + n) + 2mnx + n^2 \text{ oder}$$

$$x^4 - (m^3 + 2mn)x - m^2n - n^2 = 0.$$

Diese Gleichung mit der gegebenen verglichen führt zu m und n, und mit A zur Auflösung.

---

*) $y = r + \frac{b}{3}$ gesetzt, giebt

$$r^3 + \left(ac - 4d - \frac{b^2}{3}\right)r + \frac{b}{3}(8d + ac) - \frac{2b^3}{27} - a^2d - c^2 = 0.$$

Elftes Buch.

Zerlegung rational gebrochener Functionen in Brüche, deren Zähler constant und deren Nenner Formen ersten Grades sind.

140.

Nach den Regeln der Buchstabenrechnung lassen sich mehrere gebrochene Functionen leicht auf einerlei Nenner bringen und in eine einzige gebrochene Function vereinigen. So ist z. B.:

$$\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+6}=\frac{5(x+6)+2(x-3)}{(x-3)(x+6)}=\frac{7x+24}{x^2+3x-18}\;\ldots\ldots\;(1)$$

$$\frac{5}{x-2}+\frac{x}{x+6}=\frac{x^2+3x+30}{x^2+4x-12}\;\ldots\ldots\;(2)$$

$$\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{1}{x+2}=\frac{x^3-6x^2+15x-2}{x^4-4x^3+16x-16}\;\ldots\ldots\;(3)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+12}+\frac{5}{x+3}=\frac{7x^2-13x+63}{x^3-x^2+36}\;\ldots\ldots\;(4)$$

und es ist klar, dass, wenn die einzelnen Brüche echt gebrochene rationale Functionen sind (§ 34), dann auch ihre Vereinigung eine echt gebrochene Function giebt. Man kommt nun leicht auf den Gedanken, auch umgekehrt eine gebrochene Function, deren Nenner nicht eine Form ersten Grades (und auch keine Potenz davon) ist, als aus einfachern Brüchen zusammengesetzt und deshalb in solche zerlegbar zu betrachten, und weil diese Zerlegung besonders für die Integralrechnung von grosser Wichtigkeit ist, eine sichere Methode zu erfinden, welcher dieselbe bewirkt werden kann.

141.

Wir können hierbei nun immer annehmen, dass die gebrochene Function, welche in einfachere zerlegt werden soll, eine echt gebrochene ist, denn wäre sie es nicht, wie z B.: $\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}$, so könnte man, wie nachstehend angedeutet, durch Partialdivision die darin enthaltenen Ganzen erst herausziehen. Man erhält dann ausser dieser ganzen noch eine echt gebrochene Function, deren Zähler einfacher ist. Es ist nämlich

$$\frac{x^3+8x^2+4x-66}{x^2+3x-18}=x+5+\frac{7x+24}{x^2+3x-18}.$$

Ebenso $\frac{x^2-2x-5}{x^2-4x-6}=1+\frac{2x+1}{x^2-4x-6}$.

Auch können wir annehmen, dass in der echt gebrochenen Function Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man ihn sonst weglassen könnte. So ist z. B.

$$\frac{2x+4}{(x+5)(x-6)(x+2)}=\frac{2}{(x+5)(x-6)}.$$

142.

Um nun eine echt gebrochene Function, z. B. $\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$ in einfachere Brüche zu zerlegen, muss offenbar zuerst daran gedacht werden, den Nenner in Factoren aufzulösen, weil dieser ja als das Product aus den Nennern der zu findenden einfachern Brüche betrachtet werden muss. Könnte man den Nenner in lauter e i n f a c h e und ungleiche Factoren auflösen (was aber von der noch erst zu erfindenden Auflösung aller höhern Gleichungen abhängt), so könnte man offenbar diese einfachen Factoren als die Nenner der zu findenden einfachern Brüche ansehen, deren Zähler dann offenbar constant sein müssen, weil, wie § 140, Beispiel 2 zeigt, wenn auch nur

einer der Zähler die veränderliche Grösse enthielte, die Vereinigung der Brüche die echt gebrochene Function nicht wiedergeben könnte.

Als die natürlichste Methode, diese fraglichen constanten Zähler zu bestimmen, dringt sich hier ganz von selber die zuerst von Leibnitz angewandte Methode der unbestimmten Coefficienten auf, d. h. wir fingiren sie vorläufig. Für die gebrochene Function $\frac{7x+24}{x^2+3x-18}$ z. E. hat man zuerst aus $x^2+3x-18=0$, $x=\frac{-3\pm 9}{2}$, $=3$, $=-6$. Es ist mithin (s. § 103 bis § 107)

$$x^2+3x-18=(x-3)(x+6).$$

Setzen wir also:

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}$$

und bringen beide Brüche auf einerlei Benennung, so kommt

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{(A+B)x+(6A-3B)}{x^2+3x-18}.$$

Da nun für jeden Werth von x die rechte Seite dieser Gleichung dasselbe geben muss, wie die linke, die Nenner aber gleich sind, so muss auch für jeden Werth von x:

$$7x+24=(A+B)x+(6A-3B)$$

sein. Dies giebt uns zur Bestimmung der fraglichen Zähler A und B nach § 64 die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{r} A+B=7 \\ 6A-3B=24 \end{array}\right\} \text{ woraus } \begin{array}{l} A=5, \\ B=2. \end{array}$$

Es ist mithin

$$\frac{7x+24}{x^2+3x-18}=\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+6}.$$

Eben so ist

$$\frac{7x}{x^2+3x-18}=\frac{\frac{7}{3}}{x-3}+\frac{\frac{14}{3}}{x+6}=\frac{7}{3x-9}+\frac{14}{3x+18}.$$

Ferner ist

$$\frac{24}{x^2+3x-18}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}=\tfrac{8}{3}.\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+6}\right).$$

143.

Weil man bei dem eben gezeigten Verfahren immer so viele Bedingungsgleichungen ersten Grades erhält, als constante Zähler gesucht werden, so ist klar, dass letztere dadurch vollkommen bestimmt sind, mithin nicht verschiedene Zerlegungen stattfinden können. Bei dieser Methode lassen sich manchmal kleine Rechnungsvortheile benutzen. Man hat z. B.

$$\frac{7x+24}{(x+6)(x-3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+6}\ldots\ldots\ldots(1)$$

Um den Zähler A zu finden, multiplicire man die ganze Gleichung mit $x-3$, so kommt

$$\frac{7x+24}{x+6}=A+\frac{B(x-3)}{x+6}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Da nun die Gleichung (2) für jeden Werth von x gelten muss, so setze man beiderseits $x=3$, so hat man

$$\frac{21+24}{3+6}=A=5.$$

Um B zu erhalten, multiplicire man die Gleichung (1) mit $x+6$, so kommt

$$\frac{7x+24}{x-3}=\frac{A(x+6)}{x-3}+B,$$

setzt man beiderseits $x=-6$, so hat man

$$\frac{-42+24}{-6-3}=B=2.$$

144.

Aufgabe. Den Bruch: $\frac{4x^2+8x+30}{x^3+2x^2-21x+18}$ zu zerlegen.

Auflösung. Die cubische Gleichung $x^3+2x^2-21x+18=0$ hat die drei reellen Wurzeln 1, 3, -6. Es ist demnach

$$\frac{4x^2+8x+30}{(x-1)(x-3)(x+6)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+6}\ldots\ldots(1)$$

Multiplicire mit $x-1$ und setze dann $x=1$, so kommt

$$\frac{4+8+30}{-2.7}=A=-3.$$

Eben so findet man $B=5$, $C=2$. Es ist mithin

$$\frac{4x^2+8x+30}{x^3+2x^2-21x+18}=\frac{2}{x+6}+\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-1}.$$

Eben so findet man

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}=\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}-\frac{\frac{1}{2a}}{x+a},$$

$$\frac{2}{a^2-x^2}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{a-x}=\frac{\frac{1}{a}}{a+x}+\frac{\frac{1}{a}}{a-x}.$$

145.

Enthält der Nenner der gebrochenen Function mehrere oder lauter gleiche Factoren, wie z. B. $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}$, so kann man einen solchen Bruch offenbar nicht aus $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-2}$ entstanden denken. Einer der drei Nenner wenigstens muss $(x-2)^3$ sein. Da nun aber ausser diesem auch noch einer der Nenner $(x-2)^2$ und $x-2$ oder beide vorhanden sein können, so setze man

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

Mit dem allgemeinen Nenner multiplicirt, kommt

$$x^2+3x-4=Cx^2+(B-4C)x+(A-2B+4C)$$

$$\left.\begin{array}{r} C=1 \\ B-4C=3 \\ A-2B+4C=-4 \end{array}\right\} \text{woraus } \begin{array}{l} C=1, \\ B=7, \\ A=6, \end{array}$$

mithin ist: $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{7}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}$.

Anmerkung. In solchem Falle, wie hier, kann man auch folgendermassen verfahren:

Man setze in $\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}$, $x-2=u$, folglich $x=u+2$, so wird

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{(u+2)^2+3(u+2)-4}{u^3}=\frac{u^2+7u+6}{u^3}=\frac{1}{u}+\frac{7}{u^2}+\frac{6}{u^3}$$

und, wenn man jetzt statt u wieder $x-2$ setzt,

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{7}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}.$$

146.

Aufgabe. Den Bruch $\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}$ zu zerlegen.

Auflösung. Man setze

$$\frac{x^3-6x^2+15x-2}{(x-2)^3(x+2)}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

Multiplicirt man mit dem allgemeinen Nenner, so kommt:

$$\begin{array}{r|r|r|r} x^3 - 6x^2 + 15x - 2 = D & x^3 - 6D & x^2 + 12D & x - 8D \\ C & -2C & -4C & +8C \\ & +B & +A & -4B \\ & & & +2A \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} C + D = 1 \\ B - 2C - 6D = -6 \\ A - 4C + 12D = 15 \\ 2A - 4B + 8C - 8D = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{hieraus} \\ \text{(Algebra § 162):} \end{array} \begin{array}{r} D = 1, \\ C = 0, \\ B = 0, \\ A = 3, \end{array}$$

mithin ist $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 15x - 2}{(x-2)^3(x+2)} = \dfrac{3}{(x-2)^3} + \dfrac{1}{x+2}$.

147.

Sind mehrere oder alle einfachen Factoren des Nenners der gebrochenen Function imaginär, so könnte man auf dieselbe Weise wie vorhin verfahren und z. B.:

$$\frac{7x^2 - 25x + 62}{(x-3)(x-2+3i)(x-2-3i)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2+3i} + \frac{C}{x-2-3i}$$

setzen. Man erhält aber für den eigentlichen Zweck dieser Zerlegung (nämlich für die Integralrechnung) leichtere Rechnung, wenn man die imaginären Nenner und Zähler der Theilbrüche vermeidet. Dies kann dadurch geschehen, indem man Theilbrüche mit solchen Nennern vom zweiten Grade fingirt, welche das Product aus zwei gepaarten imaginären Factoren sind. Da man dann aber nicht verlangen kann, dass der Zähler eines solchen Theilbruchs jedesmal constant ist, indem er eine Form ersten Grades sein kann (eine Vorstellung, worauf das Beispiel 4, § 140 führt), so setzen wir für jeden dieser Nenner vom zweiten Grade (so wie auch für Potenzen desselben) eine Form ersten Grades als Zähler an, z. B.

$$\frac{7x^2 - 25x + 62}{(x-3)(x^2 - 4x + 13)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 13}.$$

Jetzt mit dem allgemeinen Nenner multiplicirt, kommt

$$7x^2 - 25x + 62 = (A + B)x^2 - (4A + 3B - C)x + 13A - 3C$$

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 7 \\ 4A + 3B - C = 25 \\ 13A - 3C = 62 \end{array}\right\} \text{hieraus} \left\{\begin{array}{l} A = 5 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{array}\right.$$

mithin ist: $\frac{7x^2 - 25x + 62}{(x - 3)(x^2 - 4x + 13)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2x + 1}{x^2 - 4x + 13}$

148.

Aufgaben. Folgende Brüche zu zerlegen:

$$\frac{4x^2 - x + 6}{(1 + 2x^2)^2}, \qquad \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2}, \qquad \frac{1}{x^3 - 1}.$$

Auflösungen. Man hat

1) $\frac{4x^2 - x + 6}{(1 + 2x^2)^2} = \frac{Ax + B}{(1 + 2x^2)^2} + \frac{Cx + D}{1 + 2x^2}$,

$$\frac{4x^2 - x + 6}{(1 + 2x^2)^2} = \frac{4 - x}{(1 + 2x^2)^2} + \frac{2}{1 + 2x^2};$$

2) $\frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$,

$$\frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{x^2 + 1};$$

3) $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$ (§ 132),

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

In der Differentialrechnung wird noch eine andere Zerlegungsmethode gezeigt, welche besonders auf Brüche, wie der letztere, anwendbar ist.

Zwölftes Buch.

Von den Kettenbrüchen.

149.

Erklärung. Unter einem Kettenbruch versteht man einen Grössenausdruck in folgender Form:

$$y_0+\cfrac{1}{y_1+\cfrac{1}{y_2+\cfrac{1}{y_3+\cfrac{1}{y_4+\cfrac{1}{y_5+\cfrac{1}{y_6}}}}}}$$
$$\vdots$$

nämlich eine ganze Zahl, y_0 (wo y_0 aber auch 0 sein kann), plus einem Bruche, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl plus einem Bruche, dessen Zähler wieder 1 ist &c. Die ganzen Zahlen $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ heissen die Glieder des Kettenbruchs. Brounker soll zuerst auf diese Bruchform verfallen sein, indem er, um die Zahl $\frac{\pi}{4}$ zu berechnen, dafür den Ausdruck

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+}}}}$$
$$\vdots$$

aufstellte.*) Euler jedoch ist der Erste gewesen, welcher die

---

*) Man erhält diese Form, indem man die Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots\cdots$ in einen Kettenbruch verwandelt.

Kettenbrüche einer näheren Betrachtung unterworfen hat und zwar in der zuerst angegebenen Form (wo nämlich der Zähler immer 1 ist), auf welche jeder andere Kettenbruch immer gebracht werden kann.

Die Kettenbrüche bieten so viele merkwürdige Eigenschaften dar und lassen so mancherlei Anwendungen zu, dass eine vollständige Theorie derselben einen ganzen Band füllen würde.

150.

Es ist leicht, einen gewöhnlichen echten oder unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Ist der Bruch echt, so dividire man Zähler und Nenner durch den Zähler; den im Nenner entstehenden Bruch eben so behandelt &c., bis der letzte Zähler 1 wird. Ist der Bruch unecht, so stelle man erst die ganze Zahl heraus. Es ist z. B.

$$\frac{17}{74} = \frac{1}{4+\frac{6}{17}} = \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}$$

$$\frac{74}{17} = 4 + \frac{6}{17} = 4 + \frac{1}{2+\frac{5}{6}} = 4 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}$$

Umgekehrt würde man ohne weitere Regel aus einem Kettenbruch den erzeugenden Bruch finden können. Es ist z. B.

$$\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{6}{5}}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{5}{6}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{17}{6}}} = \frac{1}{4+\frac{6}{17}} = \frac{17}{74}$$

151.

Beide vorhergehenden Rechnungen, um einen Bruch in einen Kettenbruch und umgekehrt zu verwandeln, lassen sich aber bedeutend abkürzen.

Um erstlich gewöhnliche Brüche in Kettenbrüche zu ver-

wandeln, z. B. $\frac{17}{74}, \frac{74}{17}, \frac{972}{1393}$, verfahre man mit jedes Bruches Nenner und Zähler, als wenn man ihren grössten gemeinschaftlichen Factor suchen wollte (Algebra § 29), so sind die Quotienten die Glieder des Kettenbruchs. Die Richtigkeit folgt aus der Rechnung in § 150, z. B.

$$17 \overset{0}{:} 74 \overset{4}{:} 17 \overset{2}{:} 6 \overset{1}{:} 5 \overset{5}{:} 1$$

mithin ist: $\frac{17}{74} = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$

$$74 \overset{4}{:} 17 \overset{2}{:} 6 \overset{1}{:} 5 \overset{5}{:} 1$$

mithin: $\frac{74}{17} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$

$$972 \overset{0}{:} 1393 \overset{1}{:} 972 \overset{2}{:} 421 \overset{3}{:} 130 \overset{4}{:} 31 \overset{5}{:} 6 \overset{6}{:} 1$$

mithin: $\frac{972}{1393} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}}}$

152.

Um nun auch ein allgemeines Gesetz zu finden, nach welchem man bequemer, als der unmittelbare Gedanke § 150 es angiebt, einen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wollen wir, die allgemeine Bezeichnung beibehaltend, statt vom letzten Gliede nach und nach zum ersten zurückzugehen, umgekehrt verfahren. Es sei also der Kettenbruch allgemein

$$y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{y_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{y_5 +}}}}}$$

Nehmen wir nur das 0te Glied, so ist y_0 offenbar kleiner, als der Werth des ganzen Kettenbruchs. Geht man bis zum 1sten Gliede, so ist offenbar $y_0 + \frac{1}{y_1}$ zu gross, weil in dem Bruche $\frac{1}{y_1}$ der Nenner zu klein ist. Geht man bis zum 2ten Gliede, so ist:

$$y_0 + \cfrac{1}{y_1 + \cfrac{1}{y_2}}$$

offenbar wieder zu klein &c. Bezeichnet man die hier auf einander folgenden Werthe, welche abwechselnd kleiner und grösser sind, als der wirkliche Werth des ganzen Kettenbruchs und Näherungswerthe (Partialwerthe) desselben genannt werden, mit $\frac{a}{a_1}, \frac{b}{b_1}, \frac{c}{c_1}$ &c., so hat man

$$\frac{a}{a_1} = \frac{y_0}{1}$$

$$\frac{b}{b_1} = y_0 + \frac{1}{y_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$$

In dem Bruche $\frac{b}{b_1}$ setze man $y_1 + \frac{1}{y_2}$ statt y_1, so kommt der Bruch

$$\frac{c}{c_1} = \frac{y_0\left(y_1 + \frac{1}{y_2}\right) + 1}{y_1 + \frac{1}{y_2}} = \frac{y_0 y_1 y_2 + y_2 + y_0}{y_1 y_2 + 1}.$$

Achtet man hier auf die Verbindung der Glieder des Kettenbruchs, so ergiebt sich ein einfaches Bildungsgesetz, nach welchem man aus den beiden ersten Brüchen $\frac{a}{a_1} = \frac{y_0}{1}$, $\frac{b}{b_1} = \frac{y_0 y_1 + 1}{y_1}$, welche jedoch immer erst unmittelbar gebildet

werden müssen, Zähler und Nenner der successiv folgenden Brüche leicht erhalten kann, indem man mit jedem folgenden Gliede sowohl Zähler als Nenner des vorhergehenden Bruchs multiplicirt und zu den Producten Zähler und Nenner des vorvorhergehenden Bruchs addirt. So ist z. B. wirklich

$$\frac{c}{c_1} = \frac{by_2 + a}{b_1 y_2 + a_1}.$$

Setzt man hierin $y_2 + \frac{1}{y_3}$, statt y_2, so ist auch

$$\frac{d}{d_1} = \frac{b\left(y_2 + \frac{1}{y_3}\right) + a}{b_1\left(y_2 + \frac{1}{y_3}\right) + a_1} = \frac{by_2y_3 + ay_3 + b}{b_1 y_2 y_3 + a_1 y_3 + b_1} = \frac{cy_3 + b}{c_1 y_3 + b_1}.$$

Hiernach ist klar, dass es einerlei ist, ob man jetzt, um den folgenden Bruch $\frac{e}{e_1}$ zu erhalten, in den vorhergehenden $y_3 + \frac{1}{y_4}$ statt y_3 setzt, oder nach der obigen Regel verfährt, und dass dieses Gesetz durchgehends stattfindet.

Hat man z. B. $4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$

so sind die auf einander folgenden Näherungswerthe (weil hier 4, 2, 1, 5 die Glieder und $\frac{4}{1}$ und $\frac{9}{2}$ die beiden ersten Brüche sind)

$$\left(\tfrac{4}{1}\right),\ \left(\tfrac{9}{2}\right),\ \tfrac{13}{3},\ \tfrac{74}{17}.$$

Sind 0, 4, 2, 1, 5 die Glieder, so hat man

$$\left(\tfrac{0}{1}\right),\ \left(\tfrac{1}{4}\right),\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{3}{13},\ \tfrac{17}{74}.$$

Sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Glieder, so hat man

$$\left(\tfrac{0}{1}\right),\ \left(\tfrac{1}{1}\right),\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{30}{43},\ \tfrac{157}{225},\ \tfrac{972}{1393}.$$

153.

Subtrahirt man irgend zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler immer $+1$ ist. Diese merkwürdige Eigenschaft lässt sich folgendermassen beweisen.

Seien $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$ zwei unmittelbar folgende Näherungswerthe und y das Glied des Kettenbruchs, welches den folgenden Näherungswerth $\frac{p}{p_1}$ bestimmt, so ist

$$\frac{p}{p_1}=\frac{ny+m}{n_1 y+m_1}.$$

Nimmt man nun die Differenz von den beiden Näherungswerthen $\frac{p}{p_1}$ und $\frac{n}{n_1}$, so wie auch von $\frac{n}{n_1}$ und $\frac{m}{m_1}$, so ist

$$\frac{ny+m}{n_1 y+m_1}-\frac{n}{n_1}=\frac{mn_1-m_1 n}{n_1(n_1 y+m_1)},$$

$$\frac{n}{n_1}-\frac{m}{m_1}=-\frac{(mn_1-m_1 n)}{m_1 n_1}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass der absolute Werth des Zählers der ersten Differenz, $\frac{p}{p_1}-\frac{n}{n_1}$, ganz derselbe ist, wie bei der zweiten, $\frac{n}{n_1}-\frac{m}{m_1}$, natürlich mit entgegengesetztem Vorzeichen, weil ja die Näherungswerthe abwechselnd zu klein und zu gross sind. Es kommt also nur darauf an, den absoluten Werth eines einzigen dieser gleichen Zähler zu bestimmen. Dazu kann man den Unterschied irgend zweier unmittelbar auf einander folgenden, also am einfachsten der beiden ersten Näherungswerthe nehmen, nämlich

$$\frac{b}{b_1}-\frac{a}{a_1}=\frac{y_0 y_1+1}{y_1}-\frac{y_0}{1}=\frac{1}{y_1}.$$

Es ist mithin der beständige Zähler in dem Unterschiede zweier unmittelbar folgenden Näherungswerthe $=+1$.

154.

Aus vorstehendem § folgt noch, dass die Unterschiede der Näherungswerthe immer kleiner werden $\frac{b}{b_1}-\frac{a}{a_1}=\frac{1}{a_1 b_1}$; $\frac{c}{c_1}-\frac{b}{b_1}=-\frac{1}{b_1 c_1}$, womit denn auch die Benennung Näherungswerthe gerechtfertigt ist, weil der letzte den vollen Werth des Kettenbruchs ausdrückt.

155.

Der wahre Werth eines Kettenbruchs, und wenn er auch bis ins Unendliche fortläuft, liegt immer zwischen zwei beliebigen auf einander folgenden Näherungswerthen $\frac{m}{m_1}, \frac{n}{n_1}$, weil ja der eine zu klein, der andere zu gross ist. Da nun der Unterschied dieser beiden nur $\frac{\pm 1}{m_1\, n_1}$, so ist klar, dass, wenn man irgend einen Näherungswerth, z. B. $\frac{m}{m_1}$, statt des ganzen Kettenbruchs setzt, der Fehler gewiss kleiner ist, als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat vom Nenner des gesetzten Näherungswerthes ist, also kleiner als $\frac{1}{m_1\, m_1}$, weil er ja noch kleiner, als $\frac{1}{m_1\, n_1}$ ist. Der Kettenbruch $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$ z. B. hat die Näherungswerthe $(\frac{0}{1})$, $(\frac{1}{4})$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{17}{74}$. Nimmt man den Bruch $\frac{1}{4}$, statt des ganzen Kettenbruchs, so ist der Fehler, den man begeht, kleiner, als $\frac{1}{16}$. Nimmt man den Bruch $\frac{2}{9}$, so ist der Fehler kleiner, als $\frac{1}{81}$ &c.

156.

In allen für einen Kettenbruch erhaltenen Näherungsbrüchen sind Zähler und Nenner immer Primzahlen gegen einander. Seien z. B. $\frac{m}{m_1}, \frac{n}{n_1}$ zwei unmittelbar auf einander folgende Näherungsbrüche, so ist $\frac{m}{m_1} - \frac{n}{n_1} = \frac{\pm 1}{m_1\, n_1}$,

$$\text{also } mn_1 - m_1 n = \pm 1.$$

Hier sind nun mn_1, $m_1 n$ ganze Zahlen. Hätten also m, m_1 oder n, n_1 einen gemeinschaftlichen Factor, so würde, indem man vorstehende Gleichung dadurch dividirt, linker Hand der Quotient eine ganze Zahl sein, was aber nicht möglich ist, weil er rechter Hand keine ganze Zahl sein kann.

157.

Wir haben im Vorhergehenden die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche mitgetheilt. Was nun ihre Anwendung betrifft, so können sie benutzt werden, um aus einer Zahl eine Quadratwurzel bis auf beliebig viele Decimalen zu ziehen, was auf periodische Kettenbrüche führt. Eine andere Anwendung in der sogenannten unbestimmten Analytik und in der höhern Zahlentheorie. Ferner hat man versucht, durch ihre Vermittelung die Wurzeln einer höhern Gleichung zu finden. Die nützlichste Anwendung möchte aber wohl die sein: einen durch sehr viele Ziffern gegebenen Bruch (Verhältniss) näherungsweise und für praktische Zwecke genügend durch kleinere Zahlen auszudrücken, indem man ihn in einen Kettenbruch verwandelt und dessen Näherungswerthe sucht.

So ist z. B. $\pi = \frac{31415926536}{10000000000}$

$$31415927 \overset{3}{:} 10000000 \overset{7}{:} 1415927 \overset{15}{:} 88511 \overset{1}{:} 88262 \text{ \&c.}$$

Es ist also: $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$ . . .

daher $\pi = \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \ldots$

Oder $e = 2{,}71828\ldots = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$ . . .

Die Quotienten sind hier

$2 + 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots$

daher $e = \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots$

Dreizehntes Buch.

Interpolation.

158.

Zufolge § 47 geht aus einer ganzen Function vom $n$ten Range

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N$$

allemal eine arithmetische Reihe vom $n$ten Range hervor, wenn man statt der veränderlichen Grösse x successive äquidifferente Werthe x_0, x_1, $x_2 \ldots$ setzt, so dass also:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$$

oder, wenn man die ganz beliebige beständige Differenz mit h bezeichnet (so dass $h = x_1 - x_0 = \ldots$), statt x nach und nach x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h \ldots$ setzt.

Hieraus folgt aber, dass, weil h beliebig ist, und statt $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h \ldots$ auch $x_0, x_0 + \frac{1}{n}h, x_0 + \frac{2}{n}h + \ldots, x_0 + \frac{n}{n}h,$ $x_0 + \frac{n+1}{n}h \ldots$ gesetzt werden darf, man zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe sehr leicht eine gleiche Anzahl neuer Glieder einschalten (interpoliren) kann, welche demselben Gesetze, wie die übrigen, unterworfen sind, mithin alle zusammen eine arithmetische Reihe von demselben Range bilden (vgl. § 48). Dies ist es nun, was man unter Interpolation zu verstehen hat. Da solche Interpolationen bei Entwerfung von Tabellen, welche eine Reihe von durch Zahlen ausgedrückten Beobachtungen oder berechneten Resultaten darstellen, und die

oft eine arithmetische Reihe bilden, zuweilen nothwendig werden, um die Tabellen zu vervollständigen, so wollen wir die Theorie der Interpolation durch ein paar Beispiele erläutern.

159.

Aufgabe. Es sind so viele Glieder einer arithmetischen Reihe durch Rechnung oder durch Beobachtung gefunden, dass der Rang dadurch bestimmt ist, z. B.:

	0	1	2	3	4
	1,	17,	97,	289,	641
$\triangle^1$	16,	80,	192,	352	
$\triangle^2$	64,	112,	160		
$\triangle^3$	48,	48			
$\triangle^4$	0				

Es sollen zwischen je zwei Glieder *n* z. B. drei Glieder interpolirt werden.

Auflösung. Da hier vorausgesetzt ist, dass die vorliegenden fünf Zahlen: 1, 17, 97, 289, 641, eine wirkliche arithmetische Reihe bilden, so kann man, nachdem durch Bildung der Differenzreihen ihr Rang bestimmt worden, erst nach der allgemeinen Formel (§ 48)

$$y = y_0 + x.\triangle^1 + \frac{x.(x-1)}{1\,.\,2}.\triangle^2 + \frac{x.(x-1).(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.\triangle^3 + \ldots$$

ihr allgemeines Glied suchen. Dieses ist, da hier $y_0 = 1$, $\triangle^1 = 16$, $\triangle^2 = 64$, $\triangle^3 = 48$,

$$y = 8x^3 + 8x^2 + 1.$$

Setzt man hierin $x = 0, 1, 2, 3\ldots$, so kommt die gegebene Reihe wieder, nämlich

$$1,\ 17,\ 97,\ 289,\ 641.$$

Um nun zwischen je zwei Glieder drei Glieder zu interpoliren, braucht man in demselben allgemeinen Gliede statt der stetigen Zunahme von x, nämlich $h = 1$, nur $h = \frac{1}{4}$ zu

nehmen (§ 45) und also $x=0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, \ldots$ zu setzen, so kommt die gegebene Reihe mit drei interpolirten Gliedern, nämlich

$$1,\ 1\tfrac{5}{8},\ 4,\ 8\tfrac{7}{8},\ 17,\ 29\tfrac{1}{8}, \ldots$$

160.

Setzt man in der Formel für das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe:

$$y = y_0 + x.\triangle + \frac{x.x-1}{1\,.\,2}\triangle^2 + \frac{x.x-1.x-2}{1\,.\,2\,.\,3}\triangle^3 + \ldots$$

$x = 0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1} \ldots$, so erhält man dieselbe Reihe mit n interpolirten Gliedern. Setzt man, um keine Brüche substituiren zu brauchen, $\frac{x}{n+1}$ statt x, so erhält man die gewöhnliche allgemeine Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1}\triangle^1 + \frac{x.(x-n-1)}{(n+1)^2}.\frac{\triangle^2}{1.2} + \frac{x.(x-n-1)(x-2n-2)}{(n+1)^3}.\frac{\triangle^3}{1.2.3} + \ldots$$

worin nun für x die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3... zu setzen sind.

161.

Ist die zu interpolirende Reihe vom dritten oder gar noch höhern Range, so wird die Arbeit sehr mühsam.*) In der Regel ist aber die zu interpolirende Reihe nur vom zweiten Range (öfters noch vom ersten), also $\triangle^3 = 0$, und dann kann man das Interpoliren durch ganz einfaches Addiren bewirken. Dies ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

So wie man durch Subtraction aus der Hauptreihe die Differenzreihen bildet, so muss sich offenbar auch wieder rückwärts durch Addition aus den Differenzreihen oder vielmehr nur aus den Anfangsgliedern sämmtlicher Reihen die Hauptreihe bilden lassen. Man hat z. B.

---

*) Für diese Fälle hat Gauss expeditivere Interpolations-Methoden angegeben. S. Berliner astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1830.

4,	9,	16,	25,	36...
	5,	7,	9,	11...
		2,	2,	2...

Wäre nun das Anfangsglied einer Reihe $=4$ gegeben und die Anfangsglieder 5 und 2 ihrer beiden Differenzreihen (also die zu findende Reihe vom zweiten Range), so hat man:

2,	2,	2,	2,	2,	2,	2...
5,	7,	9,	11,	13,	15,	17...
4,	9,	16,	25,	36,	49,	64...

162.

Man berechne also, wenn n Glieder interpolirt werden sollen, nach der Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1} . \triangle^1 + \frac{x.(x-n-1)}{(n+1)^2} . \frac{\triangle^2}{1.2} + \ldots$$

direct nur so viele Glieder, dass man die Anfangsglieder der Differenzreihen bilden kann, also drei Glieder, wenn die Reihe vom zweiten, und nur zwei Glieder, wenn sie vom ersten Range (eine arithmetische Progression) ist, und verfahre dann wie im vorhergehenden Beispiel, wobei man, wie es die Umstände oder die Bequemlichkeit des Rechners verlangen, die Reihen unter oder auch neben einander ordnen kann. Sollen z. B. in der Reihe

4, 36, 100, 196

welche, wenigstens in der hier gegebenen Ausdehnung (vier Glieder), als eine arithmetische sich ergiebt, drei Glieder interpolirt werden, so ist hier $n=3$, $y_0=4$, $\triangle^1=32$, $\triangle^2=32$, $\triangle^3 y=0$, und man hat

$$y = 4 + \frac{x}{4} . 32 + \frac{x.(x-4)}{4 . 4} . \frac{32}{1.2}$$

oder $y = 4 + 4x + x^2$.

Für $x = 0, 1, 2\ldots$ kommt die Reihe

4,	9,	16...
	5,	7 ...
		2 ...

Mithin sind 4, 5, 2 die Anfangsglieder der gesuchten und ihrer Differenzreihen; daher:

2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2 ...
5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23 ...
4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121 ...

163.

Angenommen, es sei die Tabelle der Briggs'schen Logarithmen bis zu $\log x_0 = \log 6000 = 3{,}7781513$ berechnet und es solle diese Tabelle für die nun folgenden Zahlen 6001, 6002... bis 6040 fortgesetzt werden.

Statt nun die Logarithmen unmittelbar für die jedesmal um eine Einheit wachsenden Zahlen zu berechnen, was nach § 76 geschehen könnte, ist es bequemer, sie zuerst nur innerhalb schicklicher Intervalle, h, z. B. von 10 zu 10, zu berechnen und dann die Lücken durch Interpolation auszufüllen.

Weil nämlich, wenn man den Modulus der Briggs'schen Logarithmen $0{,}43429448\ldots = M$ setzt und beachtet, dass

$$l(x_0+h)=l\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right]=lx_0+l\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

und also der Briggs'sche Logarithmus, nämlich:

$$\log(x_0+h)=Mlx_0+M.\frac{h}{x_0}-\frac{M}{2}.\frac{h^2}{x_0^2}+\frac{M}{3}.\frac{h^3}{x_0^3}-+\ldots$$

so sieht man, dass, weil $x_0=6000$, für kleine Werthe von $h=10, 20, 30\ldots$ die unendliche Reihe sehr convergent wird, und dass bis zu einer gewissen Grenze, z. B. bis $h=40$, das dritte Glied $\frac{M}{3}.\frac{h^3}{x_0^3}=\frac{M}{3}.\frac{40^3}{6000^3}$ schon vernachlässigt werden kann, wenn man die Logarithmen nur bis auf sieben Decimalen genau haben will. Man kann also in diesem Falle die zwar

transcendente Reihe dennoch als eine arithmetische betrachten, und zwar vom zweiten Range, so lange das dritte, und vom dritten Range, so lange das vierte Glied keinen Einfluss hat.

Da nun $\log x_0 = Mlx_0$ schon bekannt ($\log 6000 = 3{,}7781513$), so hat man aus der Gleichung

$$\log(x_0 + h) = Mlx_0 + M\frac{h}{x_0} - \frac{M}{2}\cdot\frac{h^2}{x_0^2},$$

indem man $h = 0,\ 10,\ 20\ldots$ setzt,

y_0	$\triangle^1$	$\triangle^2$	$\triangle^3$
log 6000 = 3,7781513			
..6010 = 3,7788745	7232		
...6020 = 3,7795965	7220	— 12	
...6030 = 3,7803173	7208	— 12	0
...6040 = 3,7810369	7196	— 12	0

Sollen nun 9 Glieder interpolirt werden, so geht die Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x}{n+1}\cdot\triangle^1 + \frac{x(x-n-1)}{(n+1)^2}\cdot\frac{\triangle^2}{1.2},$$

mit $n = 9$; $\triangle^1 = 7232$; $\triangle^2 = -12$; $\triangle^3 = 0$ und $y_0 = 3{,}7781513$,

über in $\quad y = 3{,}7781513 + 723{,}8x - 0{,}06x^2.$

y	$\triangle^1$	$\triangle^2$
3,7781513	723,73	—0,12
2236,74	723,62	
2960,36	723,50	
3683,86	723,38	
4407,24	723,26	
5130,50	723,14	
5853,64	723,02	
6576,66	722,90	
7299,56	722,78	
8022,34	722,66	
8745,00	722,54	
9467,54	722,42	
3,7790189,96	722,32	
0912,28		

Setzt man hierin $x = 0,\ 1,\ 2\ldots$ so kommt die Reihe in der ersten Columne, die man aber, nachdem nur die drei ersten Glieder und die erste und zweite Differenz berechnet sind, leichter durch Addition bilden kann.

Die kleine constante Differenz — 0,12 kann man leicht im Kopfe behalten und deshalb sehr schnell die erste Differenzreihe und daraus die gesuchte Hauptreihe bilden. Offenbar wird auch ein geübter

Rechner nicht so viele Ziffern schreiben, als hier der Deutlichkeit halber geschehen.

164.

Auf diese Weise sind nun sehr viele Tabellen (logarithmische, trigonometrische, astronomische, physikalische &c.) berechnet. Nur wenige Zahlen werden direct berechnet oder durch Beobachtung und Experimente bestimmt und dann die übrigen, also die meisten, durch Interpolation gefunden. Das Interpoliren wird innerhalb kleiner Intervalle selbst dann noch oftmal angewandt, wenn die Differenzen $\triangle^1, \triangle^2, \triangle^3 \ldots$ auch nicht strenge auf 0 auslaufen, jedoch immer kleiner und beinahe gleich werden. Alsdann wird von den letzten beinahe gleichen Differenzen das arithmetische Mittel als constant genommen. Je kleiner dann die stets abnehmenden Differenzen $\triangle^1, \triangle^2 \ldots$ sind, desto mehr convergirt die Interpolationsreihe.

165.

Ist die Function zwischen zwei veränderlichen Grössen, x, y, nicht bekannt und sind die für x gesetzten Werthe $x_0, x_1, x_2 \ldots$ zu welchen die durch Beobachtung gefundene Reihe $y_0, y_1, y_2 \ldots$ gehört, nicht äquidifferent, so kann man auch nicht auf die vorhin gezeigte Weise die zu andern Werthen von x gehörigen Werthe von y finden oder interpoliren. Um jedoch auch in diesem Fall eine Relation $y = f(x)$ aufzustellen, könnte man bei n Beobachtungen von der folgenden Form (parabolischen Linien) ausgehen:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + mx^{n-1},$$

und die Coefficienten $a, b, c, \ldots, m$ aus den n Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
y_0 &= a + bx_0 + cx_0^2 + \ldots + mx_0^{n-1} \\
y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots + mx_1^{n-1} \\
&\vdots \\
y_{n-1} &= a + bx_{n-1} + cx_{n-1}^2 + \ldots + mx_{n-1}^{n-1}
\end{aligned}$$

berechnen. Die Arbeit wäre aber selbst für wenige Beobachtungen eine überaus mühsame und für jeden andern Punct immer aufs neue zu wiederholen. Durch folgende Betrachtung kommt man aber leichter zum Ziel.

166.

Bei dem wirklichen Versuche*), die Elimination nach der gewöhnlichen Methode auszuführen, macht man (was auch vorauszusehen), die Beobachtung, dass, weil die Bedingungsgleichungen (deren hier nur 4 angenommen werden mögen) in Bezug auf die Grössen y_0, y_1, y_2, y_3 linear sind, d. h. diese Grössen nur in der ersten Potenz enthalten, dieselben auch in den allgemeinen Formeln für die zu findenden Coefficienten a, b, c, d nur linear (nur in der ersten Potenz und nicht mit einander multiplicirt) vorkommen können, und dass es in den Formeln für a, b, c, d kein Glied geben wird, welches nicht eine dieser Grössen y_0, y_1, y_2, y_3 als Factor enthielte. Man ist deshalb berechtigt, anzunehmen, dass

$$y = F(x).y_0 + f(x).y_1 + \varphi(x).y_2 + \psi(x).y_3$$

wo $F(x)$, $f(x)$ &c. ganze Functionen von x sind. Diese Functionen müssen für vorliegendes Beispiel vom dritten Grade und so beschaffen sein, dass

für $x = x_0$

$$F(x) = 1,\ f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0,\ \psi(x) = 0$$

für $x = x_1$ dagegen

$$F(x) = 0,\ f(x) = 1,\ \varphi(x) = 0,\ \psi(x) = 0$$

für $x = x_2$

$$F(x) = 0,\ f(x) = 0,\ \varphi(x) = 1,\ \psi(x) = 0$$

für $x = x_3$

$$F(x) = 0,\ f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0,\ \psi(x) = 1$$

weil sonst nicht für $x = x_0, x_1, x_2, x_3$; $y = y_0, y_1, y_2, y_3$ kommen kann.

*) Wir folgen von hier an fast wörtlich der Abhandlung im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1830.

Soll aber $F(x)=0$ werden für $x=x_1, x_2, x_3$, so lehrt die Algebra, dass $F(x)$ die drei Factoren $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$ enthalten muss (§ 104). In dem, was $F(x)$ sonst noch enthält, darf kein x mehr vorkommen, weil x sonst gegen die Voraussetzung die dritte Potenz überschreiten würde. Bezeichnen wir also mit C den Inbegriff der übrigen constanten Factoren in $F(x)$, so ist

$$F(x)=C(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Nach der ersten Bedingung muss aber für $x=x_0$, $F(x)=1$ sein, daher

$$1=C(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3),$$

$$\text{mithin } C=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$\text{folglich } F(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}.$$

Dieselben Schlüsse auf $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ angewendet, geben den allgemeinen Ausdruck:

$$y=\begin{cases}\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\cdot y_0\\ \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\cdot y_1\\ \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\cdot y_2\\ \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\cdot y_3\end{cases}$$

Diese äusserst regelmässige Interpolationsformel eignet sich für den Gebrauch der Logarithmen und lässt sich offenbar leicht auf beliebig viele Puncte ausdehnen. Sie findet sich auch unter dem Namen Lagrange's Interpolationsformel in Lacroix's Calcul différent. et intégral, jedoch ohne Begründung.

Anhang.

Summation einiger Reihen.

167.

Bezeichnet man die Summe der Reihe:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+n\varphi)$$

d. h. den dafür zu setzenden und gleichwerthigen geschlossenen Ausdruck vorläufig mit s und multiplicirt auf beiden Seiten mit $2\cos\varphi$, so ist

$$2s.\cos\varphi = 2\cos\alpha\cos\varphi + 2\cos(\alpha+\varphi).\cos\varphi + 2\cos(\alpha+2\varphi)\cos\varphi + \ldots + 2\cos(\alpha+n\varphi)\cos\varphi.$$

Zufolge Trigonometrie § 100, 32 ist

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) &= 2\cos\alpha.\cos\varphi \\
\cos(\alpha+2\varphi) + \cos\alpha &= 2\cos(\alpha+\varphi).\cos\varphi \\
\cos(\alpha+3\varphi) + \cos(\alpha+\varphi) &= 2\cos(\alpha+2\varphi).\cos\varphi \\
\cos(\alpha+4\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) &= 2\cos(\alpha+3\varphi).\cos\varphi \\
&\vdots \\
\cos(\alpha+(n+1)\varphi) + \cos(\alpha+(n-1)\varphi) &= 2\cos(\alpha+n\varphi).\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Dies substituirt, kommt

$$2s.\cos\varphi = \begin{cases}\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \cos(\alpha+3\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+(n+1)\varphi) \\ \cos(\alpha-\varphi) + \cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \ldots + \cos(\alpha+(n-1)\varphi)\end{cases}$$

$$2s.\cos\varphi = s - \cos\alpha + \cos(\alpha+(n+1)\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) + s - \cos(\alpha+n\varphi)$$

$$2s.(1-\cos\varphi) = \cos(\alpha+n\varphi) - \cos(\alpha+(n+1)\varphi) - [\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha]$$

$$2s.2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin(\alpha+((n+\tfrac{1}{2})\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi - 2\sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi).\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\varphi) - \sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$2s.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}n\varphi).\sin\frac{n+1}{2}\varphi$$

$$s = \frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Es ist mithin

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + .. + \cos(\alpha+n\varphi) = \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und wenn man $\alpha = 0$ setzt, so ist

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}n\varphi . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

168.

Multiplicirt man die Gleichung

$$s = \sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+n\varphi)$$

beiderseits mit $2\cos\varphi$, so ist

$$2s . \cos\varphi = 2\sin\alpha . \cos\varphi + 2 . \sin(\alpha+\varphi) . \cos\varphi + \ldots + 2\sin(\alpha+n\varphi) . \cos\varphi \ldots (1)$$

Nun aber ist

$$\sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha-\varphi) = 2\sin\alpha . \cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+2\varphi) + \sin\alpha = 2\sin(\alpha+\varphi) . \cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+3\varphi) + \sin(\alpha+\varphi) = 2\sin(\alpha+2\varphi) . \cos\varphi$$
$$\sin(\alpha+4\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) = 2\sin(\alpha+3\varphi) . \cos\varphi$$
$$\vdots$$
$$\sin(\alpha+(n+1)\varphi) + \sin(\alpha+(n-1)\varphi) = 2\sin(\alpha+n\varphi) . \cos\varphi.$$

Dies in Gleichung (1) substituirt, kommt:

$$2s . \cos\varphi = \begin{cases} \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+(n+1)\varphi) \\ \sin(\alpha-\varphi) + \sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+(n-1)\varphi) \end{cases}$$

$$2s . \cos\varphi = s - \sin\alpha + \sin(\alpha (n+1)\varphi) + \sin(\alpha-\varphi) + s - \sin(\alpha+n\varphi)$$

$$2s . (1-\cos\varphi) = \sin\alpha - \sin(\alpha-\varphi) - \{\sin(\alpha+(n+1)\varphi) - \sin(\alpha+n\varphi)\}$$

$$2s . (1-\cos\varphi) = 2\cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\varphi) . \sin\tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos(\alpha + (n+\tfrac{1}{2})\varphi)\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2s . \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\varphi) - \cos(\alpha + (n+\tfrac{1}{2})\varphi)$$

$$2s . \sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi.$$

Es ist mithin

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+\varphi 2) + \sin(\alpha+3\varphi) + \ldots + \sin(\alpha+n\varphi) = \frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi) . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und wenn man $\alpha = 0$ setzt,

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi . \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

169.

Um die Summe der Reihe

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi$$

zu finden, beachte man, dass (Trigonometrie § 100):

$$1-\cos\varphi=2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,.\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos\varphi-\cos 2\varphi=2\sin\frac{3\varphi}{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos 2\varphi-\cos 3\varphi=2\sin\frac{5\varphi}{2}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\vdots$$

$$\cos(n-1)\varphi-\cos n\varphi=2\sin\frac{2n-1}{2}\varphi\,.\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Addirt man dies System von Gleichungen, so kommt:

$$1-\cos n\varphi=2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\left(\sin\tfrac{1}{2}\varphi+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi\right)$$

Es ist mithin $\left(\text{weil } 1-\cos n\varphi=2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\right)$

$$\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}+\sin\frac{5\varphi}{2}+\ldots+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi=\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

170.

Allgemeine Regeln, gesetzmässige unendliche convergente Reihen zu summiren, kann die Analysis allein nicht geben. Fasst in jedem besondern Falle müssen, wenn die Summation überhaupt möglich ist, besondere Kunstgriffe benutzt werden. Oftmals geschieht es dadurch, dass man die unendliche Reihe mit irgend einem schicklich gewählten Factor multiplicirt (wie eben schon bei ein paar endlichen Reihen gezeigt), oft auch dadurch, dass man die Coefficienten der Potenzen der veränderlichen Grösse in einzelne Brüche zerlegt und zusieht, ob die dadurch entstandenen neuen Reihen anderweitig schon bekannt und summirbar sind. Ist dies der Fall, so ist damit zugleich die Convergenz der Reihe bewiesen. Nehmen wir z. B. die Reihe

$$\frac{x}{1.2}-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}-\frac{x^4}{4.5}+-\ldots\pm\frac{x^n}{n.(n+1)}$$

so kann man, weil (§ 142) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, mithin:

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

obige Reihe auch so schreiben:

$$x\left(1-\frac{1}{2}\right)-x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+-\ldots$$

Diese Reihe zerlegt sich nun aber in folgende zwei:

$$\begin{cases} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Die erste Reihe ist bekannt, $=l(1+x)$, die zweite Reihe lässt sich, indem man 1 addirt und subtrahirt, so schreiben:

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\ldots-1$$

oder auch so:

$$\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots}{x}-1.$$

Dies ist aber gleich $\frac{l(1+x)}{x}-1$. Daher die fragliche Reihe

$$\frac{x}{1.2}-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}-\frac{x^4}{4.5}+-+-\ldots=l(1+x)+\frac{l(1+x)}{x}-1$$

$$=\frac{x+1}{x}.l(1+x)-1.$$

Setzt man $x=1$, so ist

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+-\ldots=2\,l2-1=l4-1.$$

171.

Aufgabe. Man suche die Summe folgender Reihe:

$$\frac{x}{1.3}-\frac{x^2}{3.5}+\frac{x^3}{5.7}-\frac{x^4}{7.9}+-\ldots\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Auflösung. Die Coefficienten lassen sich folgenderweise zerlegen (§ 142):

$$\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{5.7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$
$$\vdots$$

Obige Reihe, deren Summe wir $=s$ setzen, zerlegt sich also in folgende zwei:

$$s=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{5}-\frac{x^4}{7}+-\ldots\right)\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{7}-\frac{x^4}{9}+-\ldots\right)\end{cases}$$

oder, indem wir $x=u^2$ setzen, in:

$$2s=\begin{cases}u\left(u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\ldots\right)\ldots\ldots\ldots(1)\\ -\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{5}-\frac{u^6}{7}+-+\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

Die erste Reihe ist offenbar $=u\,\mathrm{Arctg}\,u$ (§ 87, (1)).

Die zweite Reihe lässt sich so schreiben:

$$1-\frac{u^2}{3}+\frac{u^4}{5}-\frac{u^6}{7}+\ldots-1$$

oder auch so: $$\frac{u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\ldots}{u}-1$$

mithin ist

$$2s = u \operatorname{Arctg} u + \frac{\operatorname{Arctg} u}{u} - 1 = \frac{u^2+1}{u} \operatorname{Arctg} u - 1.$$

Mithin ist, weil $u = \sqrt{x}$:

$$\frac{x}{1.3} - \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{5.7} - \frac{x^4}{7.9} + - \ldots . = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Arctg} \sqrt{x} - \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man $x = 1$, so ist

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + - \ldots = \frac{\pi - 2}{4}.$$

172.

Aufgabe. Man suche die Summe folgender Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots . + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Auflösung. Es ist:

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$\Sigma \left[\frac{1}{n.(n+1)}\right] = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

und für $n = \infty$ (weil dann $\frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{n+1} = 0$) ist,

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{in infinitum.}$$

173.

Aufgabe. Die Summe s folgender Reihe zu finden:

$$s = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots$$

Auflösung. Multiplicire beiderseits mit $x - 1$, so kommt

$$(x-1)s = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots - 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - - \ldots$$

$$(x-1)s + 1 = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \ldots$$

Setzt man jetzt $x = 1$, so ist

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

174.

Umgekehrt lassen sich aber nach einer sehr leichten Regel unzählige gesetzmässige Reihen bestimmen, welche alle summirbar sind. Schreibt man nämlich eine beliebige Reihe von Zahlen hin und bildet dann die sogenannte Summenreihe, indem man die Summen von ein, zwei, drei &c. Gliedern sucht, so muss offenbar, wenn man in der gebildeten Summenreihe das erste Glied vom zweiten subtrahirt, das zweite Glied der summirten Reihe, und wenn man das zweite vom dritten subtrahirt, das dritte und allgemein das $n$te Glied der summirten Reihe kommen, wenn man das $(n-1)$te Glied der Summenreihe vom $n$ten Gliede derselben subtrahirt. Aus dieser Vorstellung folgt nun aber, dass, wenn man eine nach positiver Seite, also für die Zahlen, 1, 2, 3..... continuirliche Function von x, z. B. $\frac{x}{x+1}$, als das summatorische Glied einer unbekannten Reihe, als bekannt annimmt, man das allgemeine (x)te Glied der unbekannten Reihe (also auch die Reihe selbst) findet, wenn man das $(x-1)$te Glied vom $x$ten Gliede subtrahirt. Soll z. B. $\frac{x}{x+1}$ das summatorische Glied sein, so ist das allgemeine (x)te Glied der entsprechenden Reihe

$$= \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x(x+1)}$$

folglich ist (vergl. § 51)

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{x(x+1)}.$$

Soll x^2 das summatorische Glied sein, so ist das allgemeine (x)te Glied der entsprechenden Reihe $= x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$. Daher

$$x^2 = 1 + 3 + 5 + 7 \dots + (2x - 1).$$

175.

Lehrsatz. Wenn die Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ summirbar ist, so sind zu gleicher Zeit auch folgende beiden Reihen summirbar:

$$a + bx.\sin\alpha + cx^2 \sin 2\alpha + dx^3.\sin 3\alpha + \dots$$
$$a + bx.\cos\alpha + cx^2 \cos 2\alpha + dx^3.\cos 3\alpha + \dots$$

Beweis. Man setze die Summe der ersten Reihe $= y$, die der zweiten $= z$, multiplicire die erste mit $i = \sqrt{-1}$ und addire sie zur zweiten, so hat man

$$z + yi = a(1+i) + bx(\cos\alpha + i\sin\alpha) + cx^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \dots$$

oder auch (§ 88)

$$z + yi = a(1+i) + bx(\cos\alpha + i\sin\alpha) + cx^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 + \dots$$

oder wenn man $x(\cos\alpha + i\sin\alpha) = u$ setzt

$$z + yi = ai + a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + \dots$$

Die Summe der Reihe $a + bx + cx^2 + \dots$, welche nach Voraussetzung summirbar ist, wird irgend eine Function von x sein; bezeichnen wir sie mit F (x), so ist auch

$$z + yi = ai + \mathrm{F}(u).$$

Die Function F (u) besteht aus reellen und imaginären Theilen, lässt sich aber (§ 88) in zwei Theile zerlegen, wovon der eine reell, der andere imaginär ist, so dass wir $\mathrm{F}(u) = p + qi$ setzen können. Mithin ist

$$z + yi = p + qi + ai = p + (q + a).i.$$

Sind aber zwei complexe Grössen einander gleich, so müssen offenbar die reellen und imaginären Theile besonders einander gleich sein (§ 85), daher:

$$z = p$$
$$y = q + a$$

Setzt man z. B. $a = b = c = \ldots = 1$, so hat man die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 \ldots$ deren Summe (§ 62) $= \frac{1}{1-x}$, also $F(x) = \frac{1}{1-x}$, mithin auch $F(u) = \frac{1}{1-u}$. In diesem besondern Fall ist also

$$z + yi + \frac{1}{1-u}$$

oder für u seinen Werth gesetzt,

$$z + yi = i + \frac{1}{1 - x\cos\alpha - ix\sin\alpha}$$

Zähler und Nenner mit $1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha$ multiplicirt,

$$z + yi = i + \frac{1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

$$z + yi = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \left(1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\right) i.$$

Man hat also

$$z = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + x^3\cos 3\alpha + \ldots = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

$$y = 1 + x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha + x^3\sin 3\alpha + \ldots = 1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

Theorie der imaginären Grössen.

176.

Die sehr subtile Theorie der imaginären Grössen wurde zuerst von Gauss streng wissenschaftlich begründet. Die uns

bereits 1830 mündlich mitgetheilten tiefsinnigen Ansichten darüber sind seitdem in einer Vorlesung der Societät der Wissenschaften in Göttingen überreicht. Der Bericht darüber findet sich in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1831, 64. Stück. Da aber diese Anzeigen wohl nur Wenige sich verschaffen können, so wollen wir aus dem fraglichen Bericht hier Folgendes mittheilen:

„So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Puncten dargestellt werden, in der der Anfangspunct die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspuncts erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer unbegrenzten Ebene befindlich angesehen und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dass wir, anstatt einer Reihe von Puncten, ein System von Puncten vor uns haben, die sich auf eine zwiefache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen. Der nächste Punct bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl i, so wie der nächste Punct bei 0 in der nächsten Nebenreihe auf der andern Seite auf $-i$ u. s. f. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die complexen Grössen einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Grössen in ein neues helles Licht gestellt.

Unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neueren Zeit. Ursprünglich ausgehend von dem Begriff der absoluten ganzen Zahlen, hat sie ihr Gebiet stufenweise erweitert; zu den ganzen Zahlen sind die gebrochenen, den rationalen die irrationalen, zu den positiven die

negativen, zu den reellen die imaginären hinzugekommen. Dies Vorschreiten ist aber immer anfangs mit furchtsam zögerndem Schritt geschehen. Die ersten Algebraisten nannten noch die negativen Wurzeln der Gleichungen falsche Wurzeln, und sie sind es auch, wo die Aufgabe, auf welche sie sich beziehen, so eingekleidet vorgetragen ist, dass die Beschaffenheit der gesuchten Grösse kein Entgegengesetztes zulässt. Allein so wenig man in der allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge giebt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, eben so wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen: die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen anderen Fällen ein adäquates Substrat finden. Darüber ist man nun freilich seit langer Zeit im Klaren. Allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären — ehemals und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, unmögliche genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen.

Der Verf. (Gauss) hat diesen hochwichtigen Theil der Mathematik seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspuncte betrachtet, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieses öffentlich bestimmt auszusprechen, wenn gleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben, sie bestehen in Folgendem:

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was

mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen, findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind, z. B. A, B, C, D..., und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter, als der Umtausch der Glieder der Relation, so dass, wenn die Relation (oder der Uebergang) von A zu B als + 1 gilt, die Relation von B zu A durch — 1 dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in Eine, wenn gleich unbegrenzte Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder, was dasselbe ist, bilden sie eine Mannichfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise, wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Uebergangs von einem Gliede des Systems zu einem andern, ausser den vorigen Einheiten + 1 und — 1, noch zweier anderer unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$. Offenbar muss aber dabei noch postulirt werden, dass die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem b e s t i m m t e n Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blos mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er eben so, wie er den durch + 1 und — 1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet,

Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, -1, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nämlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate vertheilt und die Durchschnittspuncte zu den Symbolen wählt. Jeder solcher Punct A hat hier vier Nachbarn, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Puncte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch -1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punct nach Gefallen rechts oder links nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes Andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen nachweisen können.*) Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, dass es doch von unserer Willkür abhing, welche von den beiden sich in einem Puncte durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe und welche Richtung in ihr man als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollte; man sieht ferner, dass, wenn wir die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen wollen, man nothwendig die vorher durch -1 bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muss. Das heisst aber in der Sprache der Mathematiker: $+i$ ist mittlere Proportionalgrösse zwischen $+1$ und -1 oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich

*) Beide Bemerkungen, sagt Gauss, hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.

nicht die mittlere Proportionalgrösse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspuncte betrachtet und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grösstentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relation zwischen Dingen, die eine Mannichfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

Construction der imaginären Grössen.

177.

Ueber die geometrische Construction der imaginären Grössen hat Herr Drobisch der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig eine Abhandlung überreicht, welche zugleich eine kurze Geschichte der imaginären Grössen und Nachweis der hierüber erschienenen Schriften enthält. Sie ist abgedruckt in den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 2ter Band, 1848. Da auch diese Berichte nur auf öffentlichen

Staatsbibliotheken sich befinden, so wollen wir hier Folgendes daraus mittheilen:

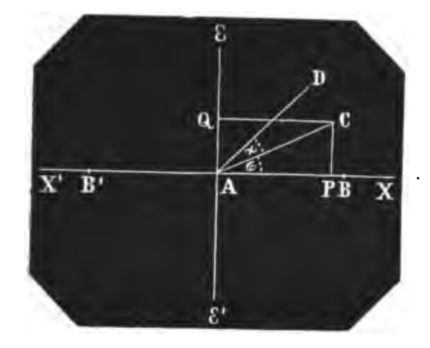
„Meine Nachweisung der geometrischen Bedeutung der imaginären Grössen, sagt Herr Drobisch, ist folgende:

„Wenn auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten Geraden X′X ein fester Punct, A, gegeben ist, und von diesem aus nach entgegengesetzten Richtungen auf X′X zwei gleiche Abschnitte $AB = AB'$ aufgetragen werden, so bezeichnet man die Lage des Puncts B′ gegen A in Vergleichung mit der Lage des Puncts B gegen A durch $-AB$, und umgekehrt die Lage von B gegen A in Vergleichung mit der Lage von B′ gegen A durch $-AB'$. Man erhält also die Bestimmung der Lage eines jeden der beiden Puncte B, B′ aus der Bestimmung der Lage des andern durch Vorsetzung des Minuszeichens, oder, wie es auch aufgefasst werden kann, des Coefficienten (-1), so dass $AB' = (-1) AB$ und $AB = (-1) AB'$ ist, wenn resp. AB, AB′ die Bestimmungen der Lage von B, B′ gegen A bedeuten. Der Coefficient (-1) drückt hier also die wechselseitige Beziehung aus, welche zwischen den Lagen der beiden, in gleichen Entfernungen von A nach entgegengesetzten Richtungen bestimmten Puncte B, B^1 gegen A stattfindet.*)

Wenn nun in der Ebene, in welcher X′X liegt, ausserhalb dieser Linie ein dritter Punct, C, in der Entfernung $AC = AB = AB'$ von A gegeben ist, und AC mit AB den Winkel φ bildet, so fragt es sich, ob auch dann noch ein Coefficient von AB aufgefunden werden kann, der die Lage von C gegen A in Vergleichung mit der Lage von B gegen A ausdrückt.

---

*) Man kann von hier an auch folgenden kürzern Weg einschlagen: Sei λ der unbekannte Factor, mit welchem man die Linie AB multipliciren muss, damit sie sich um 90° dreht (in die Lage AE kommt), so muss man nochmals mit λ multipliciren, damit sie sich wiederum um 90° dreht, (in die gerade entgegengesetzte Lage $AB' = (-1) . AB$ kommt), so dass nämlich: $\lambda^2 . AB = -AB$, woraus: $\lambda = \sqrt{-1}$. Ist nun $AB = +1$, so ist $AE = +\sqrt{-1}$, $AB' = \lambda^2 = -1$, $AE' = \lambda^3 = -\sqrt{-1}$, $AB = \lambda^4 = 1$. Die Ausführung der Multiplikation mit lateralen Grössen wird hiedurch einer Versinnlichung fähig. So ist z. B.: $2i . 3i = 6 . i^2 = -6$ &c.



Da die Verschiedenheit zwischen der Lage von C gegen A und von B gegen A nur auf der Verschiedenheit der Richtungen der beiden Geraden AB, AC beruht, und diese durch den Winkel φ bestimmt wird, so muss der gesuchte Coefficient eine Function von φ sein. Er sei daher $= f(\varphi)$, so dass also:

$$AC = AB . f(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Aendere jetzt AC seine Lage, indem φ in $\varphi + \psi$ und AC in AD übergehen mag, so wird auf dieselbe Weise die Lage von D gegen A in Vergleichung mit der Lage von B gegen A bestimmt durch:

$$AD = AB . f(\varphi + \psi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es lässt sich aber nach demselben Princip auch die Lage von D gegen A in Vergleichung mit der von C gegen A bestimmen, und wird, da AD mit AC den Winkel ψ bildet, alsdann sein:

$$AD = AC . f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Substituirt man hier für AC seinen Ausdruck in (1), so folgt:

$$AD = AB . f(\varphi) . f(\psi)$$

und wenn dies mit dem Ausdruck von AD in (2) gleich gesetzt wird:

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi) . f(\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dieser Bedingungsgleichung für die Form der Function f entspricht aber bekanntlich allein:

$$f(\varphi) = a^{\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)^{*)}$$

---

*) Weil $a^{\varphi} . a^{\psi} = a^{\varphi + \psi}$.

wo a eine noch unbestimmte Grösse ist. Demnach ist, vermöge (1):

$$AC = AB . a^{\varphi} \dots\dots\dots\dots (6)$$

Hieraus wird nun für $\varphi = \pi$:

$$AC = AB . a^{\pi}$$

Für diesen Abweichungswinkel geht aber AC in AB′ über, und ist daher $AC = AB' = -AB$; woraus sofort folgt:

$$a^{\pi} = -1;\ a = (-1)^{\frac{1}{\pi}} \dots\dots\dots\dots (7)$$

Demnach ist, vermöge (6):

$$AC = AB . (-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} \dots\dots\dots\dots (8)$$

und $(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}$ der gesuchte Coefficient.

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wo AC in die auf X′X in A senkrecht Gerade AE übergeht, so wird nach (8):

$$AE = AB . (-1)^{\frac{1}{2}} = AB . \sqrt{-1} \dots\dots\dots (9)$$

Ebenso wird für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ oder $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, wo AC in die der AE entgegengesetzten Linie AE′ übergeht:

$$AE^{1} = AB(-1)^{\frac{3}{2}} = -AB . \sqrt{-1} \dots\dots (10)$$

Hieraus erhellt, dass $\pm\sqrt{-1}$ als der Coefficient anzusehen ist, durch welchen die senkrechte Lage der damit behafteten Geraden gegen die Lage, welche ihr zukommt, wenn sie den Coefficienten ± 1 hat, bezeichnet wird. Es wird nun aber auch:

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi + i \sin\varphi \text{*)}$$

*) Es ist $\cos\pi \pm i \sin\pi = -1$. Mithin:

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = (\cos\pi \pm i \sin\pi)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi.$$

daher nach (8):

$$AC = AB(\cos\varphi + i\sin\varphi) \dots\dots\dots\dots (11)$$

wofür auch gesetzt werden kann:

$$AC = AB . e^{i\varphi} \dots\dots\dots\dots (12)$$

Es kann also auch $e^{i\varphi}$ als der gesuchte Coefficient betrachtet werden. Schreibt man für (11):

$$AC = AB . \cos\varphi + iAB . \sin\varphi$$

so bedeutet in dem Ausdrucke zur Rechten des Gleichheitszeichens AB cos φ ohne Zweifel eine nach derselben Richtung wie AB von A aus auf AX aufzutragende Linie, da cos φ nur zur Bestimmung ihres Grössenverhältnisses gegen AB dient. Dagegen i. AB sin φ nach (9) eine Linie von der Länge AB sin φ, welche in A senkrecht auf AX zu errichten ist. Fällt man also von C auf AB und AE die resp. Senkrechten CP, CQ, so ist mit Bezug auf die Lage:

$$AP = AB . \cos\varphi; \; AQ = AB \sin\varphi . \sqrt{-1}.$$

Sollen nun nach (11) diese Linien addirt werden, so kann dies nichts Anderes bedeuten, als: es soll die zweite Linie AQ, ohne ihre Grösse und Richtung zu ändern, so an die erste AP angesetzt werden, dass ihr Anfangspunct mit dem Endpunct der letztern zusammenfällt. Dies geschieht, wenn AQ sich selbst parallel fortrückt, bis sie in die Lage PC kommt" &c.

Reduction der Gleichungen durch das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe.

178.

Das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe

$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \dots\dots$$

mit den Differenzen

$$\begin{array}{ccccccc} a & & a_2 & & a_3 & & a_4 \dots \\ & b & & b_2 & & b_3 \dots & \\ & & c & & c_2 \dots & & \\ & & & d \dots & & & \\ & & & e \dots & & & \end{array}$$

ist (s. § 48)

$$t_n = t_0 + na + \frac{n(n-1)b}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)c}{2.3} + \ldots.$$

oder nach n geordnet

$$\left.\begin{aligned} t_n = t_0 &+ \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4} + \frac{e}{5}\right) n \\ &+ \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{11d}{24} - \frac{5e}{12}\right) n^2 \\ &+ \left(\frac{c}{d} - \frac{d}{4} + \frac{7e}{24}\right) n^3 \\ &+ \left(\frac{d}{24} - \frac{e}{12}\right) n^4 + \frac{e}{120} n^5 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Ist nun die Gleichung $f(x) = 0$ gegeben und setzt man in derselben für x der Reihe nach die Werthe

$$\varkappa, \quad \varkappa + \varepsilon, \quad \varkappa + 2\varepsilon, \quad \varkappa + 3\varepsilon, \ldots.$$

so mag $f(x)$ bezüglich die Werthe

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad t_3, \ldots.$$

mit den Differenzen

$$\begin{matrix} a & & a_2 \ldots \\ & b \ldots & \end{matrix}$$

annehmen. Da nun $f(x) = 0$ sein soll, so ist $t_n = 0$, wenn $x = \varkappa + n\varepsilon$. Bestimmt man daher n aus der Gleichung $0 = t_n$ d. i (siehe A) aus der Gleichung

$$0 = t_0 + \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \ldots\right) n + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} \ldots\right) n^2 + \frac{c}{6} n^3 + \ldots, \ldots \text{(N)}$$

so ist $\qquad x = \varkappa + n\varepsilon \ldots\ldots \text{(Q)}$

Beispiel. $\quad x^2 + \left(8 + \frac{\log x}{2}\right) x + 17 = 0.$

$x = 3; \qquad 4; \qquad 5$ gesetzt, giebt

$$f(x) = 1{,}28432; \; -0{,}20412; \; 0{,}25257$$

$$\left.\begin{matrix} -1{,}48844 & 0{,}45669 \\ 1{,}94513 & \end{matrix}\right\} \text{Diff.}$$

Mit $t_0 = 1{,}28432$, $a = -1{,}48844$, $b = 1{,}94513$ geht Gleichung N über in

$$0 = 1{,}28432 + \left(-1{,}48844 - \frac{1{,}94513}{2}\right) n + \frac{1{,}94513}{2} n^2$$

und es ist

$$n' = 0{,}7359 \text{ und } n'' = 1{,}7946.$$

Aus Q ergiebt sich nun mit $\varkappa = 3$ und $\varepsilon = 1$

$$x' = 3 + 0{,}7359 \,.\, 1 = 3{,}7359$$
$$x'' = 3 + 1{,}7946 \,.\, 1 = 4{,}7946.$$

Zusatz. Benutzt man nur 2 Hypothesen:

$x = \alpha,\ \beta$ und erhält man damit
$f(x) = \text{A, B,}$ so ist

$\varkappa = \alpha$, Differenz $\varepsilon = \beta - \alpha$, $t_0 = \text{A}$, Differenz $a = \text{B} - \text{A}$ und Gleichung N wird

$$o = \text{A} + (\text{B} - \text{A})n,$$
daher $n = \frac{\text{A}}{\text{A} - \text{B}}$.

Aus Q ergiebt sich alsdann

$$x = \alpha + \frac{\text{A}}{\text{A} - \text{B}} \,.\, (\beta - \alpha)$$

oder die schon bekannte Näherungsformel

$$x = \frac{\text{A}\beta - \text{B}\alpha}{\text{A} - \text{B}}.$$

Anmerkung. Von besonderem Vortheil kann die Reduction eines zusammengesetzteren (z. B. transscendenten) Ausdrucks auf eine einfachere algebraische Form in der Integralrechnung werden. Ist z. B. $\sqrt{x} \,.\, \sin x \,.\, l\,(x + 2)$ gegeben und weiss man, dass x innerhalb der Grenzen 0 und π liegen muss, so kann man für x die Hypothesen 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π wählen und der damit erhaltene bequeme algebraische Ausdruck (vom 6. Grade) ist dem gegebenen transscendenten sehr nahe identisch.

Auflösung der Gleichungen mit 2 Unbekannten.

179.

Es seien die Gleichungen

$$\text{I. } f(x, y) = 0 \text{ und II. } \varphi(x, y) = 0$$

gegeben und es mag y leichter aus I. als aus II. berechnet werden können, wenn für x bestimmte Werthe substituirt werden.

Wählt man in I. für x die Werthe

$$\varkappa, \quad \varkappa + \varepsilon, \quad \varkappa + 2\varepsilon, \quad \varkappa + 3\varepsilon, \ldots$$

und löst diese Gleichung nach y auf, substituirt alsdann die für y gefundenen Werthe in II. und löst diese letztere Gleichung nach x auf, so mögen sich hier für x bezüglich die Werthe

$$\begin{array}{ccccccc} m_0 & & m_1 & & m_2 & & m_3 \ldots\ldots \text{ mit den Diff.} \\ & a & & a_2 & & a_3 \ldots & \\ & & b & & b_2 \ldots & & \\ & & & c \ldots & & & \end{array}$$

ergeben. Offenbar ist nun $x = m_n$, wenn $m_n = \varkappa + n\varepsilon$.

Nach Formel A in § 178 geht aber letztere Gleichung über in

$$m_0 + \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \ldots\right) n + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} \ldots\right) n^2 + \ldots = \varkappa + n\varepsilon \ldots\ldots (\text{N}).$$

Ist hier die Unbekannte n gefunden, so ist

$$x = \varkappa + n\varepsilon \ldots\ldots (\text{Q}).$$

Beispiel. I. $xy - y^{\frac{x}{3} - 1} - 10 = 0$; II. $x^{y-2} + \frac{x}{y} - 10 = 0$;

Wegen des Exponent $\frac{x}{3}$ setze man die Hypothesen

$$x = 3, \qquad 6, \qquad 9, \qquad 12.$$

Diese Werthe in I. substituirt, resultirt daselbst

$$y = 3{,}66667; \qquad 2; \qquad 1{,}29844; \qquad 2{,}93045.$$

Diese für y gefundenen Zahlen in II. substituirt ergeben in dieser Gleichung

$$x = 3{,}73273; \quad 18; \quad 12{,}76687; \quad 8{,}30321.$$

$$\text{Diff.} \left\{ \begin{array}{ccc} 14{,}26727 & -5{,}23313 & -4{,}46366 \\ & -19{,}50040 \quad 0{,}76947 & \\ & 20{,}26987 & \end{array} \right.$$

Mit $\varkappa = 3$, $\varepsilon = 3$, $m_0 = 3{,}73273$, $a = 14{,}26727$, $b = -19{,}50040$, $c = 20{,}26987$ wird Gleichung N:

$$3{,}73273 + 30{,}77409n - 19{,}88514n^2 + 3{,}37831n^3 = 3 + 3n,$$

oder $$n^3 - 5{,}88612n^2 + 8{,}22130n + 0{,}21689 = 0.$$

Folglich
$$n' = 2{,}35095,$$
$$n'' = -0{,}02590,$$
$$n''' = 3{,}56017.$$

Damit ergiebt sich aus Q:

$$x' = 3 + 2{,}35095 \,.\, 3 = 10{,}05285,$$
$$x'' = 3 - 0{,}02590 \,.\, 3 = 2{,}92230,$$
$$x''' = 3 + 3{,}56017 \,.\, 3 = 13{,}68051.$$

Da der letztere Werth ausserhalb der Hypothesenreihe liegt, so ist es zweifelhaft, ob derselbe gültig ist. In der That findet man für alle Hypothesen, die > 12 genommen werden, keine Lösung.

Zusatz. Nimmt man für x nur 2 Hypothesen und zwar
in Gleichung I: $x = \varkappa, \varkappa'$, womit
aus Gleichung II: $x = m, m'$ resultire,
so ergiebt sich die bequeme Näherungsformel

$$x = \frac{\varkappa m' - \varkappa' m}{\varkappa + m' - (\varkappa' + m)}.$$

Auflösung der Gleichungen mit 3 Unbekannten.

180.

Es seien die Gleichungen

I. $f(x, y, z) = 0$; II. $\varphi(x, y, z) = 0$; III. $\psi(x, y\ z) = 0$

gegeben. Setzt man für x bestimmte Werthe, so lässt sich (z. B. nach § 179) aus je 2 Gleichungen y und z finden. Die Gleichungen mögen nun so angeordnet sein, das sich y leichter aus I. und II., sowie aus I. und III., also weniger leicht aus II. und III. berechnen lässt.

Wählt man die Hypothesen

$$x = \varkappa, \qquad \varkappa + \varepsilon, \qquad \varkappa + 2\varepsilon, \ldots.$$

setzt dieselben zuerst in I. und II. ein und erhalte, nachdem z eliminirt worden, bezüglich

$$\begin{array}{llll} & y = m_0 & m_1 & m_2 \ldots \\ \text{Diff.} & \left\{ \begin{array}{lll} a & & a_2 \ldots \\ & b \ldots. & \\ & & c \ldots \end{array} \right. \end{array}$$

Dieselben Werthe für x alsdann in I. und III. substituirt mögen daselbst

$$\begin{array}{llll} & y = p_0 & p_1 & p_2 \ldots\ldots \\ \text{Diff.} & \left\{ \begin{array}{lll} a' & & a'_2 \ldots \\ & b' \ldots & \\ & & c' \ldots \end{array} \right. \end{array}$$

ergeben.

Aus diesen Reihen geht sofort hervor, dass $y = m_n$ und $x = \varkappa + n\varepsilon$, wenn $m_n = p_n$.

Nach Formel A in § 178 geht nun letztere Gleichung über in

$$m_0 + \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)n + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)n^2 + \ldots =$$
$$p_0 + \left(a' - \frac{b'}{2} + \frac{c'}{3}\right)n + \left(\frac{b'}{2} - \frac{c'}{2}\right)n^2 + \ldots.; \ldots (\text{N})$$

Ist hier n gefunden, so ist

$$x = \varkappa + n\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{Q})$$

Beispiel.
$$\begin{array}{rl} \text{I.} & z + xy - 7 = 0, \\ \text{II.} & y + x^2 z + 41 = 0, \\ \text{III.} & xy + xz - 1 = 0. \end{array}$$

Mit $x = -0{,}04 \qquad -0{,}03 \qquad -0{,}02$ erhält man

aus I. und II.: $y = -41,008 \quad -41,005 \quad -41,002$

Diff. $0,003 \quad 0,003$

aus I. und III.: $y = -30,769 \quad -39,158 \quad -55,882$

$$\text{Diff.}\begin{cases} -8,389 \quad -16,724 \\ \quad -8,335 \end{cases}$$

Mit $\varkappa = -0,04$; $s = 0,01$; $m_0 = -41,008$; $a = 0,003$; $b = 0$; $p_0 = -30,769$; $a' = -8,389$; $b' = -8,335$ geht Gleichung N über in:

$$-41,008 + 0,003n = -30,769 + (-8,389 + 4,1675)n - 4,1675n^2.$$

Mithin $n = 1,1405$ und nach Gleichung Q

$$x = -0,04 + 1,1405 \,.\, 0,01 = -0,0286.$$

Zusatz. Bei nur 2 Hypothesen und zwar

$x = \varkappa, \quad \varkappa'$ mag sich

aus I. und II. $y = m, \quad m'$

aus I. und III. $y = p, \quad p'$ ergeben.

Alsdann resultirt die sehr bequeme Näherungsformel:

$$x = \frac{(m - p)\varkappa' - (m' - p')\varkappa}{m - p - (m' - p')}.$$

Anmerkung. Mittelst der in § 179 und 180 gegebenen Methoden lassen sich Gleichungen mit 2 oder 3 Unbekannten selbst dann noch auflösen, wenn die bis jetzt bekannten Methoden nicht zum Ziele führen.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.



